

**ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ:  
«ΤΡΑΠΕΖΑ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ»  
ΓΙΑΝΝΗΣ ΜΟΣΧΟΝΑΣ**

**33<sup>ο</sup> Διαγώνισμα (Εφ' όλης της ύλης)**

**Διάρκεια: 3 ώρες**

**ΘΕΜΑ 3ο**

α) Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , είναι γνησίως μονότονες, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι 1-1.

**Μονάδες 9**

β) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f^3(x^3 - 7x) - f^3(5x - 4) = 4[f(5x - 4) - f(x^3 - 7x)]$  έχει ακριβώς δύο θετικές και μια αρνητική ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 16**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$ , η οποία ικανοποιεί

τη σχέση:  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \alpha \int_{\frac{\beta}{\alpha}}^{\frac{x+\beta}{\alpha}} e^{-at+\beta} f(x-at+\beta) dt$

με  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ .

α) Να βρείτε τον τύπο της  $f$

**Μονάδες 9**

β) Αποδείξτε ότι η  $f$  έχει δυο τοπικά ακρότατα και ένα σημείο καμπής και να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου καμπής.

**Μονάδες 5**

γ) Αποδείξτε ότι η  $C_f$  τέμνει τουλάχιστον μια φορά τον πραγματικό άξονα.

**Μονάδες 3**

δ) i) Αν η ευθεία  $\varepsilon: y = 13x - 6$  είναι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1,7)$ , να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

**Μονάδες 4**

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$  την ευθεία  $\varepsilon: y = 13x - 6$  και τον άξονα  $y'y$ .

**Μονάδες 4**

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι λύσεις όλων των θεμάτων, δίνονται με υποδειγματικό τρόπο στο παραπάνω βιβλίο.**