# ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 2018

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=$

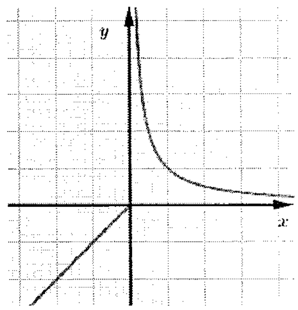
$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$ αφού η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

---

**Α2.α.** Ψ

**β.** Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.




---

**Α3.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

---

**Α4. α)** Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}$

Για κάθε $x<-2$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο -2, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$.
Για κάθε $x\in(-2,0)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-2-1=-3$ .

| x | $-\infty$   $-2$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^3+8$ | - | + | + |
| $x^3$ | - | - | + |
| $f'$ | + | - | + |
| f | ↗ Τ.Μ | ↘ | ↗ |

---

**Β2.** Η $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f''(x)=-\dfrac{24}{x^4}$ .

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι κοίλη στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ δεν έχει σημεία καμπής.

---

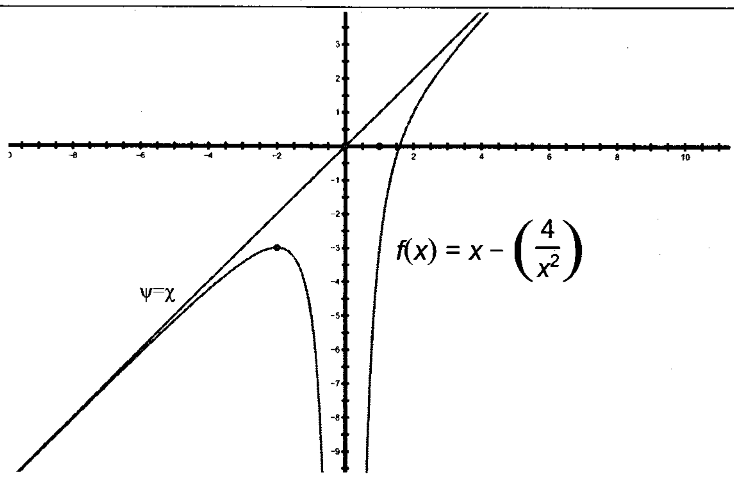
**Β3.** Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη θα είναι στο $x=0$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$ άρα η $x=0$ (y΄y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$ , η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$ , η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $-\infty$.

---

**Β4.**




## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Επειδή με το τμήμα μήκους x κατασκευάζουμε τετράγωνο, η πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος $\dfrac{x}{4}$m και εμβαδόν $\dfrac{x^2}{16}m^2$.

Με το υπόλοιπο σύρμα μήκους $(8-x)$m κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας ρ, οπότε

$2\pi\rho=8-x \Leftrightarrow \rho=\dfrac{8-x}{2\pi}$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2=\pi\left(\dfrac{8-x}{2\pi}\right)^2=\dfrac{(8-x)^2}{4\pi}$.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{4\pi x^2+4\left(64-16x+x^2\right)}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

**Γ2.** Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ με $E'(x)=\dfrac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}=\dfrac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$

---

Είναι $E'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\pi+4)x-32}{8\pi}\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\dfrac{32}{4+\pi}$

Για κάθε $x<\dfrac{32}{4+\pi}$ είναι $E'(x)<0$ άρα η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{32}{4+\pi}\right]$ και για κάθε $x > \frac{32}{4+\pi}$ είναι $E'(x) > 0$ άρα η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{4+\pi}, 8\right)$.

Η Ε παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{32}{4+\pi}$.

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4} = \frac{8}{4+\pi}$ και η διάμετρος του κύκλου είναι $2\rho = .... = \frac{8}{4+\pi}$

---

**Γ3.** Είναι $\lim_{x\to 0^+} E(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi} > 5$ γιατί $\frac{16}{5} = 3{,}2 > \pi$ ,

$E\left(\frac{32}{4+\pi}\right) = \frac{16}{\pi+4}$ και $\lim_{x\to 8^-} E(x) = 4$

Στο διάστημα $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{4+\pi}\right]$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα,

οπότε έχει σύνολο τιμών το $E(\Delta_1) = \left[\frac{32}{4+\pi}, \frac{16}{\pi}\right)$.

Επειδή το 5 βρίσκεται στο εσωτερικό του $E(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1$ στο εσωτερικό του $\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $E(x_1) = 5$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{32}{4+\pi}, 8\right)$ η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το $E(\Delta_2) = \left[\frac{32}{4+\pi}, 4\right)$.

Επειδή το 5 δεν ανήκει στο $E(\Delta_2)$ η εξίσωση $E(x) = 5$ είναι αδύνατη στο $\Delta_2$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$ και $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$

Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow x - \alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \alpha$

Για κάθε $x < \alpha$ είναι $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, \alpha]$ και για κάθε $x > \alpha$ είναι $f''(x) > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $[\alpha, +\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha)) \equiv (\alpha, 2-\alpha^2)$

---

**Δ2.** Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty, \alpha]$, η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\lim_{x\to -\infty} f'(x) = \lim_{x\to -\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = +\infty$ και επειδή η $f'$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = [2-2\alpha, +\infty)$.

Επειδή $\alpha > 1$ είναι $2 - \alpha^2 < 0$ οπότε το μηδέν βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ και επομένως υπάρχει μοναδικό $x_1$ στο εσωτερικό του $\Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$.

Αφού η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x < x_1$ είναι $f'(x) > f'(x_1) = 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$ και για κάθε $x_1 < x < \alpha$ είναι $f'(x_1) > f'(x) = 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, \alpha]$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\Delta_2 = [\alpha, +\infty)$ , η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = \lim_{x\to +\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = \lim_{x\to +\infty} \left[x\left(2\frac{e^{x-\alpha}}{x} - 2\right)\right] = +\infty$ αφού

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x-\alpha}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x-\alpha}}{1} = +\infty$ και επειδή η $f'$ επιπλέον είναι συνεχής έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f'(\Delta_2)=[2-\alpha^2,+\infty)$. Το μηδέν βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ και επομένως υπάρχει μοναδικό $x_2$ στο εσωτερικό του $\Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=0$.

Αφού η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\alpha<x<x_2$ είναι $f'(x)<f'(x_2)=0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,x_2]$ και για κάθε $x>x_2$ είναι $f'(x)>f'(x_2)=0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2,+\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2$.

---

**Δ3.** Είναι $\alpha>1\Leftrightarrow-\alpha<-1\Leftrightarrow1-\alpha<0\Leftrightarrow e^{1-\alpha}<1\Leftrightarrow\ 2e^{1-\alpha}-2<0\Leftrightarrow f'(1)<0$ άρα $1\in(x_1,x_2)$. Όμως $\alpha>1$ άρα $1\in(x_1,\alpha)$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=f(1)$ (1), τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,x_2]$ είναι και 1-1, οπότε από την (1) προκύπτει $x_0=1$ που είναι άτοπο.

**2ος τρόπος**

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=f(1)$. Από το Θ.Rolle για την f στο $(1,x_0)\subseteq(x_1,x_2)$ υπάρχει $\xi\in(1,x_0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ που είναι άτοπο αφού οι ρίζες της $f'$ είναι τα $x_1,x_2$.

---

**Δ4.** Για $\alpha=2$ είναι $f(x)=2e^{x-2}-x^2$.

Είναι $f(2)=-2$ και $f'(2)=-2$. Η εφαπτομένη της $C_f$ στο $x=2$ έχει εξίσωση:
$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+2$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$ δηλαδή στο $[2,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός από το σημείο επαφής, άρα $f(x)\geq-2x+2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$. Επειδή $\sqrt{x-2}\geq0$, είναι $f(x)\sqrt{x-2}\geq(-2x+2)\sqrt{x-2}$ οπότε και

$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx$ (2)

Θέτουμε $x-2=u\Leftrightarrow x=u+2\Rightarrow dx=du$

Για $x=2$ είναι $u=0$ και για $x=3$ είναι $u=1$, οπότε

$$\int_0^1(-2(u+2)+2)\sqrt{u}du=\int_0^1\left(-2u\cdot u^{\frac{1}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}\right)du=-2\int_0^1\left(u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}}\right)du=$$

$$=-2\left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=-2\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)=-2\cdot\frac{16}{15}=-\frac{32}{15}\quad(3)$$

Από τις σχέσεις (2),(3) προκύπτει ότι $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>-\frac{32}{15}$

**2ος τρόπος**

$$\int_2^3(2e^{x-2}-x^2)\sqrt{x-2}dx=\int_2^3 2e^{x-2}\sqrt{x-2}dx-\int_2^3 x^2\sqrt{x-2}dx\overset{u=\sqrt{x-2}}{=}$$

$$\int_0^1 4e^{u^2}u^2du-\int_0^1(u^2+2)^2\cdot2u^2du=\int_0^1 4e^{u^2}u^2du-2\int_0^1(u^6+4u^4+4u^2)du=$$

$$\int_0^1 4e^{u^2}u^2du-2\left[\frac{u^7}{7}+4\frac{u^5}{5}+4\frac{u^3}{3}\right]_0^1=\int_0^1 4e^{u^2}u^2du-2\left(\frac{1}{7}+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\right)=$$

$$\int_0^1 4e^{u^2}u^2du-\frac{268}{105}\geq\int_0^1 4u^2du-\frac{268}{105}=\left[\frac{4u^3}{3}\right]_0^1-\frac{268}{105}=\frac{4}{3}-\frac{268}{105}=-\frac{128}{105}>-\frac{32}{15}$$

($-\frac{128}{7}>-32\Leftrightarrow128<224$ ισχύει)