

Λύσεις Θεμάτων Μαθηματικών

Γ' Τάξος ΕΠΑ.Λ. - Εξέτασες 2019.

ΘΕΜΑ Α

(A1) Ανάδειξη 6ετ. 28 Γραφ. Π.Π.10

(A2) Σελ. 59 Γραφ. Π.Π.10

(A3) α) $\rightarrow 1$

β) $\rightarrow 2$

γ) $\rightarrow 1$

δ) $\rightarrow 1$

ε) $\rightarrow 2$

ΘΕΜΑ Β

11, 7, κ, 13, 11, 10

$$CV = 20\% \rightarrow CV = 0,2 \quad s^2 = 4 \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$$

(B1) $CV = \frac{s}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{s}{CV} = \frac{2}{0,2} = \frac{20}{2} \Rightarrow \bar{x} = 10$

(B2) $\bar{x} = \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} = 10 \Rightarrow \frac{52+\kappa}{6} = 10 \Rightarrow 52+\kappa = 60 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \kappa = 60 - 52 \Rightarrow \kappa = 8$$

(B3) οι τιμές GE αυγούλα είναι: 7, 8, 10, 11, 11, 13

$n = 6$ (άρτιος) Μεταίεσις: $3n \rightarrow 10$ $4n \rightarrow 11$

$$\delta = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} \Rightarrow \delta = 10,5$$

$$R = t_{\max} - t_{\min} = 13 - 7 \Rightarrow R = 6$$

B4 $x'_i = x_i - 2$ $\bar{x}' = \bar{x} - 2$
 $s' = s$

$$CV' = \frac{s'}{\bar{x}'} = \frac{s}{\bar{x} - 2} = \frac{2}{10 - 2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ή } 25\%$$

To δείχνει είναι ασφαλιότερη γιατί $CV > 10\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $f'(x) = (\sqrt{x^2 - 2x + 10})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \cdot (x^2 - 2x + 10)' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} =$
 $= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$

Γ2 $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\swarrow	T.E.	\nearrow

$\Sigma_{\infty} (-\infty, 1]$ η f είναι \searrow

$\Sigma_{\infty} [1, +\infty)$ η f είναι \nearrow

T.E. $\rightarrow f(1) = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 10} = \sqrt{1 - 2 + 10} = \sqrt{-1 + 10} = \sqrt{9} = 3$

Από αρχή T.E. $\leadsto f(x) \geq \text{T.E.} \Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 3$

Γ3 $y = 2x + \beta$ $2 = f'(5) = \frac{5-1}{\sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10}} = \frac{4}{\sqrt{25 - 10 + 10}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

$y = f(5) = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10} = \sqrt{25 - 10 + 10} = \sqrt{25} \Rightarrow y = 5$

$y = 2x + \beta \Rightarrow 5 = \frac{4}{5} \cdot 5 + \beta \Rightarrow 5 = 4 + \beta \Rightarrow 5 - 4 = \beta \Rightarrow \beta = 1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι π:

$$y = \frac{4}{5}x + 1$$

Γ4 Σημείο A (Σημείο τομής με τον άξονα x'x)

$$y = \frac{4}{5}x + 1 \xrightarrow{y=0} 0 = \frac{4}{5}x + 1 \Rightarrow \frac{4}{5}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Σημείο A} \rightsquigarrow A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$$

Σημείο B (Σημείο τομής με τον άξονα y'y)

$$y = \frac{4}{5}x + 1 \xrightarrow{x=0} y = \frac{4}{5} \cdot 0 + 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Σημείο B} \rightsquigarrow B(0, 1)$$

ΕΠΑ Δ

Δ1 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \xrightarrow{\lambda=3} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$$f'(x) = (x^3)' - (3x^2)' + (3x)' = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1 \text{ (διπλή ρίζα)}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f(x)	\nearrow		\nearrow

Οι ρίζες $x_1 = \frac{3}{8}$; $x_2 = \frac{5}{6}$ ανήκουν στο $(-\infty, 1]$
 στο οποίο η f είναι γν. αύξουσα

$$\frac{3}{8} < \frac{5}{6} \xrightarrow{+f} f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\textcircled{\Delta 2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} \stackrel{0/0}{=} \text{xx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2-2x+1) \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2 \cdot (\sqrt{x}+1)}{(x-1) \cdot x \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{x} =$$

$$\frac{3(\sqrt{1}+1)}{1} = \frac{3(1+1)}{1} = 3 \cdot 2 = 6$$

$\textcircled{\Delta 3}$ Ελάχιστος συντελεστής διεύθυνσης \rightarrow η ελάχιστος

Περίπτωση $f'(x)$ ως προς τα ακρότατα

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad (f'(x))' = (3x^2)' - (6x)' + (3)' = 6x - 6$$

$$(f'(x))' = f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{6} \Rightarrow \textcircled{x=1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		Τ.Ε.	

Για $x=1$ $f'(x) \rightarrow$ ελάχιστος

Άρα η γινεται ελάχιστος όταν $x=1$.

$$y = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1 - 3 + 3 \Rightarrow y = 1.$$

Άρα το σημείο στο οποίο ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος είναι το $(1, 1)$

(A4) Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα

→ Η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + \gamma$$

Για να είναι $3x^2 - 6x + \gamma$ χωρίς
αλλαγή πρόσημου
θα πρέπει $\Delta \leq 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \gamma \leq 0 \Rightarrow 36 - 12\gamma \leq 0$$

$$\Rightarrow 36 \leq 12\gamma \Rightarrow \gamma \geq \frac{36}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \geq 3$$

Άρα θα πρέπει $\gamma \geq 3$ για να μην έχει
ακρότατα η $f(x)$.

Αντικείμεν η ελάχιστη τιμή του γ είναι $\gamma = 3$.