

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30/5/2014

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα σχ. Βιβλίο σελ. 30

A2. Ορισμός σχ. Βιβλίο σελ.13

A3. Ορισμός σχ. Βιβλίο σελ 59

A4. α) Σ , β) \wedge , γ) \wedge , δ) \wedge , ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων έχουμε $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$

B2.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i
[2 , 4)	3	12	0,30
[4 , 6)	5	8	0,20
[6 , 8)	7	14	0,35
[8 , 10)	9	6	0,15
Σύνολο		40	1,00

B3. α)

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$x_i v_i$
[2 , 4)	3	12	0,30	36
[4 , 6)	5	8	0,20	40
[6 , 8)	7	14	0,35	98
[8 , 10)	9	6	0,15	54
Σύνολο		40	1,00	228

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{36 + 40 + 98 + 54}{40} = \frac{228}{40} = 5,7 \text{ χιλιάδες ευρώ}$$

β) Το πλήθος των πωλητών με πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων των κλάσεων $[4,5, 6)$, $[6, 8)$, $[8, 10)$ και αφού οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες το ζητούμενο πλήθος των πωλητών θα είναι: $\frac{3}{4}v_2 + v_3 + v_4 = 6 + 14 + 6 = 26$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική με $f'(x) = 12x^2 - 7x + 1$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow \dots x = \frac{1}{3} \text{ η } x = \frac{1}{4}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$		T.M.	T.E.	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ και $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ και

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$. Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο

$$x = \frac{1}{4} \text{ και τοπικό ελάχιστο στο } x = \frac{1}{3}. \text{ Αφού } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Άρα } P(K) = \frac{1}{4}, \quad P(A) = \frac{1}{3}. \text{ Συνεπώς } P(\Pi) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

Γ2. $P(\Gamma) = P(K \cup A) = P(K) + P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$$P(\Delta) = P(K' \cap A') = P[(K \cup A)'] = 1 - P(K \cup A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(A \cup \Pi') = P(A) + P(\Pi') - P(A \cap \Pi') = \\
&= P(A) + 1 - P(\Pi) - P(A - \Pi) = P(A) + 1 - P(\Pi) - P(A) = \\
&= 1 - P(\Pi) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma 3. \quad N(A) = N(\Pi) - 4 &\Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} - \frac{4}{N(\Omega)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)} = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow N(\Omega) = 48.
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν είναι y η άλλη πλευρά του ορθογωνίου της βάσης θα ισχύει:

$$2x + 2y = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x, \quad y > 0$$

$$\text{Άρα, } E(x) = x(10 - x) + 5x + 5x + 5(10 - x) + 5(10 - x) =$$

$$= 10x - x^2 + 5x + 5x + 50 - 5x + 50 - 5x = -x^2 + 10x + 100, \quad x \in (0, 10)$$

$$\text{Είναι } E'(x) = -2x + 10, \quad E'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$E'(x) > 0 \Rightarrow -2x + 10 > 0 \Rightarrow x < 5 \quad \text{και} \quad E'(x) < 0 \Rightarrow -2x + 10 < 0 \Rightarrow x > 5$$

Άρα, η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 5]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[5, 10]$. Άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = 5$ το $E(5) = 125$ που είναι και η μέγιστη επιφάνεια.

Δ2. α) Το τριώνυμο $2s^2 - 5s + 2 = 0$ έχει ρίζες το 2 και το $\frac{1}{2}$.

$$\text{Αν } s = \frac{1}{2} \text{ τότε } CV = \frac{s}{x} = \frac{1}{16} < 0,1 \text{ Άρα το δείγμα θα είναι ομοιογενές.}$$

$$\text{Συνεπώς η τιμή } s = \frac{1}{2} \text{ απορρίπτεται. Αν όμως } s = 2 \text{ τότε } CV = \frac{s}{x} = \frac{1}{4} > 0,1 \text{ το}$$

δείγμα δεν είναι ομοιογενές, άρα η τιμή $s = 2$ είναι δεκτή.

β) Αν συμβολίσουμε με $\overline{x^2}$ τη μέση τιμή των x_i^2 , $i = 1, 2, 3, \dots, 15$. Τότε από τον

$$\text{δοσμένο τύπο έχουμε: } s^2 = \frac{1}{\nu} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2}{\nu} \right\} \Leftrightarrow 4 = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{15} x_i \right)^2}{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \Leftrightarrow \overline{x^2} = 68$$

Δ3. Αφού η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[5, 10)$ κι αφού είναι

$$5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{15} = 9 \text{ θα έχουμε:}$$

$$125 = E(5) = E(x_1) > E(x_2) > \dots > E(x_{15}) = E(9) = 109$$

$$\text{Άρα, το εύρος } R = 125 - 109 = 16$$

$$\text{Όμως } E(x_i) = y_i > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 145 \Leftrightarrow$$

$$x_i^2 - 14x_i + 45 < 0 \Leftrightarrow x_i \in (5, 9).$$

Άρα τα μόνα σημεία A_i που εξαιρούμε από τον δειγματικό χώρο των 15 σημείων είναι

τα σημεία A_1 και A_{15} . Συνεπώς, αφού $N(\Omega) = 15$ και $N(B) = 13$ θα ισχύει

$$\text{τελικά } P(B) = \frac{13}{15}.$$

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς - Μαθηματικός