ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30/5/2014

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σχ. Βιβλίο σελ. 30

Α2. Ορισμός σχ. Βιβλίο σελ.13

Α3. Ορισμός σχ. Βιβλίο σελ 59

Α4. α) Σ , **β)** Λ , **γ)** Λ , **δ)** Λ , **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων έχουμε $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$

Β2.

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i
[2 , 4)	3	12	0,30
[4 , 6)	5	8	0,20
[6 , 8)	7	14	0,35
[8 , 10)	9	6	0,15
Σύνολο		40	1,00

Β3. α)

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i	$x_i\nu_i$
[2 , 4)	3	12	0,30	36
[4 , 6)	5	8	0,20	40
[6 , 8)	7	14	0,35	98
[8 , 10)	9	6	0,15	54
Σύνολο		40	1,00	228

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{36+40+98+54}{40} = \frac{228}{40} = 5,7 \text{ χιλιάδες ευρώ}$$

β) Το πλήθος των πωλητών με πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων των κλάσεων [4,5 , 6) , [6 , 8) , [8 , 10) και αφού οι παρατηρήσεις κάθε κλάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες το ζητούμενο πλήθος των πωλητών θα είναι: $\frac{3}{4}\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 6 + 14 + 6 = 26$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 12x^2 - 7x + 1$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cdots x = \frac{1}{3}$ η $x = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{4}\right]$ και $\left[\frac{1}{3}\ ,\ +\infty\right)$ και

Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{3}\right]$. Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο

$x = \frac{1}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = \frac{1}{3}$. Αφού $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Άρα $\mathrm{P(K)} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P(A)} = \frac{1}{3}$. Συνεπώς $\mathrm{P}(\Pi) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.

Γ2. $\mathrm{P}(\Gamma) = \mathrm{P}(\mathrm{K} \cup \mathrm{A}) = \mathrm{P(K)} + \mathrm{P(A)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$$\mathrm{P}(\Delta) = \mathrm{P}(\mathrm{K}' \cap \mathrm{A}') = \mathrm{P}\left[(\mathrm{K} \cup \mathrm{A})'\right] = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{K} \cup \mathrm{A}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

$$P(E)=P(A\cup \Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A\cap \Pi')=$$

$$=P(A)+1-P(\Pi)-P(A-\Pi)=P(A)+1-P(\Pi)-P(A)=$$

$$=1-P(\Pi)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

Γ3. $$N(A)=N(\Pi)-4\Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}-\frac{4}{N(\Omega)}\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{5}{12}-\frac{4}{N(\Omega)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)}=\frac{5}{12}-\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow N(\Omega)=48.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν είναι y η άλλη πλευρά του ορθογωνίου της βάσης θα ισχύει:

$$2x+2y=20\Rightarrow x+y=10\Rightarrow y=10-x \quad , \quad y>0$$

Άρα, $E(x)=x(10-x)+5x+5x+5(10-x)+5(10-x)=$

$$=10x-x^2+5x+5x+50-5x+50-5x=-x^2+10x+100 \ , \ x\in(0,10)$$

Είναι $E'(x)=-2x+10$, $\quad E'(x)=0\Rightarrow -2x+10=0\Rightarrow x=5$

$E'(x)>0\Rightarrow -2x+10>0\Rightarrow x<5$ και $E'(x)<0\Rightarrow -2x+10<0\Rightarrow x>5$

Άρα, η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,5] και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [5,10]. Άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=5$ το $E(5)=125$ που είναι και η μέγιστη επιφάνεια.

Δ2. α) Το τριώνυμο $2s^2-5s+2=0$ έχει ρίζες το 2 και το $\frac{1}{2}$.

Αν $s=\frac{1}{2}$ τότε $CV=\frac{s}{\overline{x}}=\frac{1}{16}<0,1$ Άρα το δείγμα θα είναι ομοιογενές.

Συνεπώς η τιμή $s=\frac{1}{2}$ απορρίπτεται. Αν όμως $s=2$ τότε $CV=\frac{s}{\overline{x}}=\frac{1}{4}>0,1$ το

δείγμα δεν είναι ομοιογενές, άρα η τιμή $s=2$ είναι δεκτή.

β) Αν συμβολίσουμε με $\overline{x^2}$ τη μέση τιμή των x_i^2 , $i=1,2,3,\dots,15$. Τότε από τον δοσμένο τύπο έχουμε: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right\} \Leftrightarrow 4 = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow \overline{x^2} = 68$

Δ3. Αφού η $\mathrm{E}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο [5 , 10) κι αφού είναι

$5 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{15} = 9$ θα έχουμε:

$125 = \mathrm{E}(5) = \mathrm{E}(x_1) > \mathrm{E}(x_2) > \cdots \mathrm{E}(x_{15}) = \mathrm{E}(9) = 109$

Άρα, το εύρος $R = 125 - 109 = 16$

Όμως $\mathrm{E}(x_i) = y_i > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 145 \Leftrightarrow$

$x_i^2 - 14x_i + 45 < 0 \Leftrightarrow x_i \in (5,9)$.

Άρα τα μόνα σημεία A_i που εξαιρούμε από τον δειγματικό χώρο των 15 σημείων είναι τα σημεία A_1 και A_{15}. Συνεπώς , αφού $\mathrm{N}(\Omega) = 15$ και $\mathrm{N}(\mathrm{B}) = 13$ θα ισχύει τελικά $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{13}{15}$.

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς - Μαθηματικός