ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Δευτέρα 2 /6/ 2014

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.251
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 273
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.150
Α4. α) Λ **, β)** Σ **, γ)** Σ **, δ)** Σ **, ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z = x + yi \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}$ τότε:

$$2|z|^2 + \left(z + \bar{z}\right)i - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + y^2\right) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2 + 2y^2 - 4\right) + \left(2x - 2\right)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$$

Β2. $$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} = 3\left[\frac{(1+i)^2}{1+1}\right]^{39} = 3\left(\frac{2i}{2}\right)^{39} = 3i^{39} = 3i^3 = -3i \, .$$

Β3. $$|u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η h είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει: $h'(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{e^x + 1} > 0$.

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h''(x) = -\dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Αφού είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η h είναι γνησίως αύξουσα και αφού $h''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι έχουμε:

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln\left(e^{h(2h'(x))}\right) < \ln\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right) < \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right) < 1-\ln(e+1) \Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right) < h(1) \overset{h\nearrow}{\Longleftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow$$

$$h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \overset{h'\searrow}{\Longleftrightarrow} x > 0 .$$

Γ3. Για την οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln(e^x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x - \ln(e^x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{e^x+1}$$

Θέτουμε $u = \dfrac{e^x}{e^x+1}$. Τότε όταν $x \to +\infty$ θα ισχύει $u \to u_0$ όπου

$$u_0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1 .$$

Άρα είναι $l = \lim\limits_{u\to1}\ln u = \ln 1 = 0$. Συνεπώς, η οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ είναι η $y = 0$. Για την πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln\left(e^x+1\right)}{x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{e^x}{e^x+1}}{1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1} = 1 .$$

Άρα $\lambda = 1$. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right) = 0$. Άρα $\beta = 0$.

Έτσι, η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$ είναι η ευθεία $y = \lambda x + \beta \;\Leftrightarrow\; y = x$.

Γ4. $\phi(x) = 0 \overset{e^x>0}{\Longleftrightarrow} h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln\dfrac{e^x}{e^x+1} = \ln 2^{-1} \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 .$$

Για $x > 0 \overset{h\nearrow}{\Longleftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 > 0 \Leftrightarrow$

$e^x\left(h(x)+\ln 2\right) > 0 \Leftrightarrow \phi(x) > 0$.

$$\mathrm{E} = \int_0^1 |\phi(x)| dx = \int_0^1 e^x\left(h(x)+\ln 2\right)dx = \left[e^x\left(h(x)+\ln 2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x h'(x)dx =$$

$$= \left[e^x\left(x-\ln(e^x+1)+\ln 2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx =$$

$$= e\left(1-\ln(e+1)+\ln 2\right) - \left(-\ln 2+\ln 2\right) - \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 =$$

$$= e - e\ln(e+1) + e\ln 2 - \ln(e+1) + \ln 2 =$$

$$= e - (e+1)\ln(e+1) + (e+1)\ln 2 = e + (e+1)\ln\frac{2}{e+1} \;\; \tau.\mu..$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 = f(0)$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \neq 0$ η f παραγωγίζεται ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

όπου $g(x) = xe^x - e^x + 1$ και με $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

Είναι $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ και $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Άρα, η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $g(0) = 0$.

Άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Συνεπώς, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2} > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ2. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = \int_1^x f(u)du$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η G θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $G'(x) = f(x)$.

Για $x > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$

Για $x < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$

$f(0) = 1 > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $G'(x) = f(x) > 0$

Συνεπώς, η G είναι γνησίως αύξουσα και «1-1» στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0 \Leftrightarrow G\left(2f'(x)\right) = 0 \Leftrightarrow G\left(2f'(x)\right) = G(1) \overset{G:1-1}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}$

Όμως $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x} = \dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0} e^x = \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

Η f είναι κυρτή, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και άρα «1-1».

Συνεπώς θα ισχύσει $f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$.

β) Είναι $y(t) = f\left(x(t)\right)$. Άρα $y'(t) = f'\left(x(t)\right)x'(t)$

Ισχύουν $x'(t) > 0$ και $x'(t) = 2y'(t)$ Άρα θα έχουμε:

$\dfrac{x'(t)}{2} = f'\left(x(t)\right)x'(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = f'\left(x(t)\right) = f'(0)$

Άρα τελικά, $f'(x) = f'(0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$ Τότε $y = f(0) = 1$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Μ(0,1).

Δ3. $g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2(x-2)^2=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η g παραγωγίζεται ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$g'(x)=2(e^x-e)\cdot e^x\cdot(x-2)^2+2(x-2)(e^x-2)^2=$$

$$=2(e^x-e)(x-2)\left[e^x(x-2)+e^x-e\right]=2(e^x-e)(x-2)\left[xe^x-2e^x+e^x-e\right]=$$

$$=2(e^x-e)(x-2)\left[xe^x-e^x-e\right]$$

Είναι $g'(x)=0 \Leftrightarrow (e^x-e=0$ ή $x-2=0$ ή $xe^x-e^x-e=0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=1$ ή $x=2$ ή $xe^x-e^x-e=0)$

Αν $h(x)=xe^x-e^x-e$, $x>0$ τότε $h'(x)=xe^x+e^x-e^x=xe^x>0$ για κάθε $x>0$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επειδή $h(1)=-e<0$ και $h(2)=e^2-e>0$ και η h είναι συνεχής στο διάστημα [1 , 2], από το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τ.ω: $h'(x_0)=0$

Τότε για κάθε $x>x_0 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(x_0) \Leftrightarrow h(x)>0$ και

για κάθε $x<x_0 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)<h(x_0) \Leftrightarrow h(x)<0$

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$2(e^x-e)$		−	0	+		+		+	
x - 2		−		−		−	0	+	
$h(x)=xe^x-e^x-e$		−		−	0	+		+	
g'		−	0	+	0	−	0	+	
g		↘		↗		↘		↗	

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1] και στο $[x_0,2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,x_0]$ και στο .$[2,+\infty)$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στις θέσεις $x_1=1$ και $x_2=2$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_3=x_0$

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς - Μαθηματικός