

Δευτέρα 2 /6/ 2014

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο σελ.251
 A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 273
 A3. Σχολικό βιβλίο σελ.150
 A4. α) Λ , β) Σ , γ) Σ , δ) Σ , ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\begin{aligned} 2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 &\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x^2 + 2y^2 - 4) + (2x - 2)i = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases} \end{aligned}$$

B2. $w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = 3 \left[\frac{(1+i)^2}{1+1} \right]^{39} = 3 \left(\frac{2i}{2} \right)^{39} = 3i^{39} = 3i^3 = -3i.$

B3. $|u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η h είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

και ισχύει: $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0.$

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα η συνάρτηση } h \text{ είναι κοίλη στο } \mathbb{R}.$$

Γ2. Αφού είναι $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η h είναι γνησίως αύξουσα και αφού $h''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Έτσι έχουμε:

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln(e^{h(2h'(x))}) < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < \ln e - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(2h'(x)) < 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow$$

$$h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \stackrel{h' \searrow}{\Leftrightarrow} x > 0.$$

Γ3. Για την οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln(e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Θέτουμε $u = \frac{e^x}{e^x + 1}$. Τότε όταν $x \rightarrow +\infty$ θα ισχύει $u \rightarrow u_0$ όπου

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

Άρα είναι $l = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0$. Συνεπώς, η οριζόντια ασύμπτωτη της C_h

στο $+\infty$ είναι η $y = 0$. Για την πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(e^x + 1)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{e^x}{e^x + 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 1.$$

Άρα $\lambda = 1$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0$. Άρα $\beta = 0$.

Έτσι, η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$ είναι η ευθεία $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$.

Γ4. $\phi(x) = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \ln 2^{-1} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Για $x > 0 \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 > 0 \Leftrightarrow$

$$e^x (h(x) + \ln 2) > 0 \Leftrightarrow \phi(x) > 0.$$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |\phi(x)| dx = \int_0^1 e^x (h(x) + \ln 2) dx = \left[e^x (h(x) + \ln 2) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x h'(x) dx = \\ &= \left[e^x (x - \ln(e^x + 1) + \ln 2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \\ &= e(1 - \ln(e+1) + \ln 2) - (-\ln 2 + \ln 2) - \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^1 = \\ &= e - e \ln(e+1) + e \ln 2 - \ln(e+1) + \ln 2 = \\ &= e - (e+1) \ln(e+1) + (e+1) \ln 2 = e + (e+1) \ln \frac{2}{e+1} \quad \tau.μ.. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R}^* ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Για κάθε $x \neq 0$ η f παραγωγίζεται ως πηλίκο

$$\text{παραγωγίσιμων συναρτήσεων με } f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\text{όπου } g(x) = xe^x - e^x + 1 \text{ και με } g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

$$\text{Είναι } g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ και } g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Άρα, η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $g(0) = 0$.

$$\text{Άρα } g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0. \text{ Συνεπώς, } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} αφού είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Δ2. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(x) = \int_1^x f(u)du$. Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα η G θα είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $G'(x) = f(x)$.

$$\text{Για } x > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\text{Για } x < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$f(0) = 1 > 0. \text{ Άρα } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } G'(x) = f(x) > 0$$

Συνεπώς, η G είναι γνησίως αύξουσα και «1-1» στο \mathbb{R} .

$$\text{Είναι } \int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0 \Leftrightarrow G(2f'(x)) = 0 \Leftrightarrow G(2f'(x)) = G(1) \stackrel{G:1-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Όμως } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{DLH}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^x = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Η f είναι κυρτή, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και άρα «1-1».

Συνεπώς θα ισχύσει $f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$.

β) Είναι $y(t) = f(x(t))$. Άρα $y'(t) = f'(x(t))x'(t)$

Ισχύουν $x'(t) > 0$ και $x'(t) = 2y'(t)$ Άρα θα έχουμε:

$$\frac{x'(t)}{2} = f'(x(t))x'(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(x(t)) = f'(0)$$

Άρα τελικά, $f'(x) = f'(0) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$ Τότε $y = f(0) = 1$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0,1)$.

Δ3. $g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2 = (e^x - e)^2 (x - 2)^2$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η g παραγωγίζεται ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(e^x - e) \cdot e^x \cdot (x - 2)^2 + 2(x - 2)(e^x - e)^2 = \\ &= 2(e^x - e)(x - 2) [e^x(x - 2) + e^x - e] = 2(e^x - e)(x - 2) [xe^x - 2e^x + e^x - e] = \\ &= 2(e^x - e)(x - 2) [xe^x - e^x - e] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } g'(x) = 0 &\Leftrightarrow (e^x - e = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \text{ ή } xe^x - e^x - e = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } xe^x - e^x - e = 0) \end{aligned}$$

Αν $h(x) = xe^x - e^x - e$, $x > 0$ τότε $h'(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x > 0$ για κάθε $x > 0$
Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επειδή $h(1) = -e < 0$ και $h(2) = e^2 - e > 0$ και η h είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, από το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τ.ω: $h'(x_0) = 0$

Τότε για κάθε $x > x_0 \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(x_0) \Leftrightarrow h(x) > 0$ και

για κάθε $x < x_0 \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(x_0) \Leftrightarrow h(x) < 0$

x	0	1	x_0	2	$+\infty$	
$2(e^x - e)$	-	0	+	+	+	
$x - 2$	-	-	-	0	+	
$h(x) = xe^x - e^x - e$	-	-	0	+	+	
g'	-	0	0	-	0	+
g		↘	↗	↘	↗	

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και στο $[x_0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, x_0]$ και στο $[2, +\infty)$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στις θέσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_3 = x_0$

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς - Μαθηματικός