ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Δευτέρα 25-5-2015

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.) Θεωρία σελ. 194

Α2.) Θεωρία σελ.188

Α3.) Θεωρία σελ. 259

Α4.) **α)** Λάθος , **β)** Σωστό , **γ)** Λάθος , **δ)** Σωστό , **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.) Είναι $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$, αφού είναι $|z|\geq 0$

Άρα, οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2

Β2.) **α)** Είναι $|z_1|=2 \Leftrightarrow |z_1|^2=4 \Leftrightarrow z_1\bar{z_1}=4 \Leftrightarrow \bar{z_1}=\frac{4}{z_1}$

Ακριβώς όμοια θα έχουμε $\bar{z_2}=\frac{4}{z_2}$

Άρα θα είναι $\bar{w}=\frac{2\bar{z_1}}{\bar{z_2}}+\frac{2\bar{z_2}}{\bar{z_1}}=\frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w$

Άρα $\overline{w}=w \Leftrightarrow w-\overline{w}=0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Im}(w)i=0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(w)=0 \Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$

β) Είναι $|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right| \le \frac{2|z_1|}{|z_2|}+\frac{2|z_2|}{|z_1|}=\frac{2\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 2}{2}=4$

Αφού όμως $w\in\mathbb{R}$ θα είναι $|w|\le 4 \Leftrightarrow -4\le w\le 4$

Β3.) $w=-4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \Leftrightarrow {z_1}^2+{z_2}^2=-2z_1z_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow {z_1}^2+{z_2}^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow \left(z_1+z_2\right)^2=0 \Leftrightarrow z_2=-z_1 \quad , \quad (1)$$

Είναι $\left(\mathrm{B\Gamma}\right)=|z_3-z_2| \overset{(1)}{=} |2iz_1+z_1|=|z_1||1+2i|=2\sqrt{1^1+2^2}=2\sqrt{5}$

Επίσης $\left(\mathrm{A\Gamma}\right)=|z_3-z_1|=|2iz_1-z_1|=|z_1||-1+2i|=2\sqrt{(-1)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

Συνεπώς, αφού (ΒΓ) =(ΑΓ) , το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)'=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ για κάθε $x\ne 1$ και

αφού η f είναι συνεχής στο x=1, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι, το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα:

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

Είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=0$ αφού, $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ *και* $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2+1\right)'} = \cdots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι το $(0\,,+\infty)$

Γ2.) Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, θα έχει την ιδιότητα 1-1 . Έτσι, η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right) = f(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}\left(x^2+1\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2} \quad , \quad (1)$$

Αφού όμως ο αριθμός $\frac{e^3}{2} \in (0,+\infty)$ (το σύνολο τιμών της f) η εξίσωση (1) θα έχει μια τουλάχιστον λύση. Η λύση αυτή είναι μοναδική, αφού η f είναι 1-1.

Γ3.) **Α΄ τρόπος:**

Για κάθε x με $0 < 2x \le t < 4x$, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε:

$$f(t) < f(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < f(4x)\left[t\right]_{2x}^{4x} \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < f(4x)(4x-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2xf(4x)\,.$$

Β΄ τρόπος:

Θεωρώ την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad , \quad x \ge 0$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,+\infty)$ με $F'(x) = f(x)$ αφού η f είναι συνεχής. Για κάθε x > 0 είναι 2x < 4x.

Η F είναι συνεχής στο $[2x,4x] \subset (0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο (2x , 4x). Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (2x,4x)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(x_1) = \frac{F(4x)-F(2x)}{4x-2x} \Leftrightarrow f(x_1) = \frac{\int_0^{4x} f(t)\,dt - \int_0^{2x} f(t)\,dt}{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{2x}.$$ Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$$x_1 < 4x \Leftrightarrow f(x_1) < f(4x) \Leftrightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{2x} < f(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2xf(4x)$$

για x>0.

Γ4.) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η $\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_1^{4x} f(t)\,dt - \int_1^{2x} f(t)\,dt}{x} \underset{DHL}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[4f(4x)-2f(2x)\right].$$

Είναι $\lim_{x\to 0} 4f(4x) = 4\lim_{u\to 0} f(u) = 4f(0) = 4$ και

$$\lim_{x\to 0} 2f(2x) = 2\lim_{u\to 0} f(u) = 2f(0) = 2$$

Άρα, $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} 4f(4x) - \lim_{x\to 0} 2f(2x) = 4-2 = 2 = g(0)$

Συνεπώς, η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, άρα η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Από το (Γ3) έχουμε:

$$\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow -\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt > -2xf(4x)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με:

$$g'(x) = \frac{4xf(4x) - 2xf(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2} > \frac{4xf(4x) - 2xf(2x) - 2xf(4x)}{x^2} =$$

$$= \frac{2\left[f(4x) - f(2x)\right]}{x}$$

Όμως, $2x < 4x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2x) < f(4x) \Leftrightarrow f(4x) - f(2x) > 0$.

Άρα, $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.) $f'(x)\left[e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right] = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right)' = (2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c \quad , \ (1)$$

Για x=0 είναι: $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \overset{f(0)=0}{\Longleftrightarrow} c = 0$. Άρα η σχέση (1) γράφεται: $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 1 = 2e^{f(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[e^{f(x)}\right]^2 - 2xe^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - x\right)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(e^{f(x)}-x\right)^2}=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \left|e^{f(x)}-x\right|=\sqrt{1+x^2} \quad , \quad (2)$$

Αν $h(x)=e^{f(x)}-x \quad , \quad x\in\mathbb{R}$ τότε $h(x)\neq 0$ αφού $x^2+1\neq 0$ και αφού επιπλέον $h(0)=e^{f(0)}=e^0=1>0$ και η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα ισχύει: $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι, η σχέση (2) γράφεται: $e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}$

Αφού $e^{f(x)}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα ισχύει $x+\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα είναι $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \;,\; x\in\mathbb{R}$.

Δ2.) α) $$f'(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0 \quad , \; x\in\mathbb{R}$$

και $$f''(x)=\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+		-
f			

Η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty,0\right]$ και κοίλη στο $\left[0,+\infty\right)$ και έχει σημείο καμπής το Σ(0,0).

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_0 = 0$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x$$

Η f είναι κοίλη στο [0 , 1] , άρα θα ισχύει:

$f(x) \le x \Leftrightarrow x - f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

Η f είναι και συνεχής, συνεπώς θα έχουμε:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 |x - f(x)|\, dx = \int_0^1 (x - f(x))\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \right] = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \left[x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \left[x^2+1\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2} \quad \tau.\mu.$$

Δ3.) Η $f^2(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα η συνάρτηση $\int_0^x f^2(t)\, dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $e^{\int_0^x f^2(t)\, dt}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+} e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\left(\int_0^x f^2(t)\,dt\right)'=$$

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot f^2(x)=e^0 f(0)=1\cdot 0=0$$

Για $x>0 \overset{f\nearrow}{\Longleftrightarrow} f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$ Άρα θα είναι:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left|f(x)\right|=\lim_{x\to 0^+} x\ln f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\left(-\frac{x^2 f'(x)}{f(x)}\right)=0$$ αφού είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{f(x)}\right)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x}{f'(x)}=\frac{0}{1}=0$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1\right)\ln\left|f(x)\right|\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt-1}}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+} x\ln\left|f(x)\right|=0$$

Δ4.) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)\,dt\right)$$

Η g είναι συνεχής στο [0,2] ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και ισχύει: $g(2)=-8+3\int_0^2 f^2(t)\,dt$

Είναι $f(0)=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα

Για κάθε $x>0 \Leftrightarrow f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$

Από Δ2.β έχουμε $f(x)\le x \Leftrightarrow f^2(x)\le x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-x^2\le 0$

και η $f^2(x)-x^2$ δεν είναι παντού μηδέν , άρα θα ισχύει:

$$\int_0^2\left(f^2(x)-x^2\right)dx<0 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)\,dx<\int_0^2 x^2\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)\,dx<\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)\,dx<\frac{8}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(x)\,dx<8 \Leftrightarrow -8+3\int_0^2 f^2(x)\,dx<0 \Leftrightarrow g(2)<0$$

Είναι $g(3)=1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt$ και ισχύει

$f(x)\le x \Leftrightarrow f\left(x^2\right)\le x^2 \Leftrightarrow f\left(x^2\right)-x^2\le 0$ και η $f\left(x^2\right)-x^2$ δεν είναι παντού μηδέν, άρα θα ισχύει:

$$\int_0^1\left(f\left(x^2\right)-x^2\right)dx<0 \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(x^2\right)dx<\int_0^1 x^2\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f\left(x^2\right)dx<\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f\left(x^2\right)dx<\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\int_0^1 f\left(x^2\right)dx<1 \Leftrightarrow -3\int_0^1 f\left(x^2\right)dx>-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f\left(x^2\right)dx>0 \Leftrightarrow g(3)>0$$

Συνεπώς ισχύει $g(2)\cdot g(3)<0$, άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g\left(x_0\right)=0$.

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς – Μαθηματικός

www.moschonas.gr E-mail: john@moschonas.gr