ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Επιμέλεια: Γιάννης Μοσχονάς - Μαθηματικός

ΘΕΜΑ Α

Α 1. Σελ 135 σχολικού βιβλίου.

Α2. α). Ψ , β) f(x)=|x| , σελ. 99 σχολικό Βιβλίο (Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και άλλο αντιπαράδειγμα)

Α 3. Σελ. 73 σχολικού βιβλίου

Α 4. α) Λ , β) Σ , γ) Λ , δ) Σ , ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β 1. Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει και αρκεί $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$ Άρα

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (0,1) \quad \text{και} \quad f\left(g(x)\right) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Β 2. Για κάθε $x \in (0,1)$, $h'(x) = \dfrac{1-x}{x} \cdot \dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{x(1-x)} > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Άρα είναι $h(x) \nearrow$ και άρα «1-1» . Το σύνολο τιμών είναι:

$$h\left((0,1)\right) = \left(\lim_{x \to 0} h(x), \lim_{x \to -1} h(x)\right) = \mathbb{R}.$$

Για την αντίστροφη: $y = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \dfrac{e^y}{e^y + 1}$ Άρα θα ισχύει:

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \;,\; x \in \mathbb{R}.$$

Β 3. $\phi'(x) = \dfrac{(e^x)'(e^x+1) - e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\phi \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

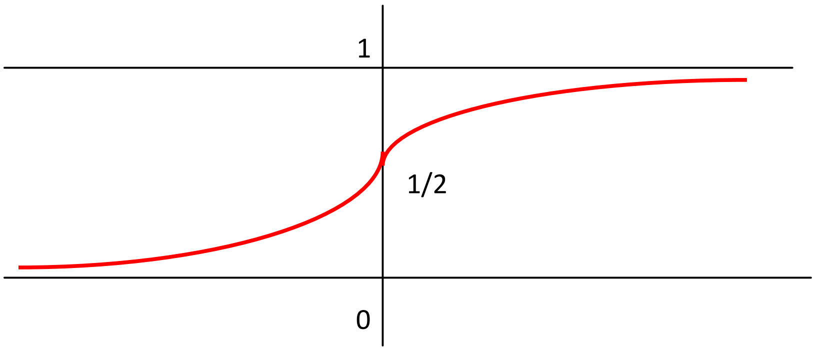
$$\phi''(x) = \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)' = \frac{(e^x)'(e^x+1)^2 - e^x 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^2} = \cdots = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^2}$$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$\phi''(x) > 0 \Leftrightarrow \cdots\ x < 0$, $\phi''(x) = 0 \Leftrightarrow \cdots\ x = 0$, και $\phi''(x) < 0 \Leftrightarrow \cdots\ x > 0$.

Άρα κυρτή στο $(-\infty\ ,\ 0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ με σημείο καμπής $\mathrm{A}\left(0,\frac{1}{2}\right)$

Β 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$, άρα στο $-\infty$ έχει ασύμπτωτη την y=0 (y΄y άξονα)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{1}{1+0}=1$, άρα στο $+\infty$ έχει ασύμπτωτη την y=1.



ΘΕΜΑ Γ

Γ 1. Η τυχαία εφαπτόμενη (ε) της C_f έχει εξίσωση: (ε): $y+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0(x-x_0)$

Αφού η (ε) διέρχεται από το σημείο Α θα ισχύει: $-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-\frac{\pi}{2}$, $x\in[0,\pi]$

$h'(x)=\eta\mu x\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $x\in[0,\pi]$. Άρα μοναδικές ρίζες το 0 και το π, άρα θα είναι:

$(\varepsilon_1):y=-x$, $(\varepsilon_2):\ y=x-\pi$ $h'(x)$

	0	π/2	π
$h'(x)$	−	+	
$h(x)$	↘	↗	

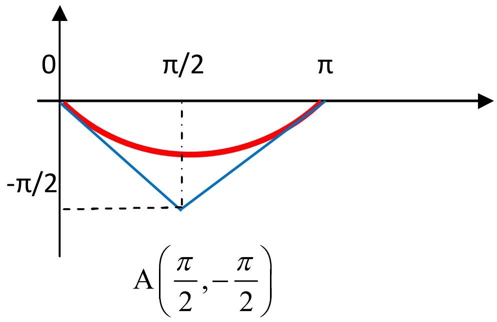
Ε.τ. $h(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}$

Β τρόπος: Προφανείς ρίζες το 0 και το π και η μοναδικότητα με άτοπο μέσω θεωρήματος Rolle.

Γ 2. $E_2 = -\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = -(-1)+1 = 2$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑπ είναι $E_{OA\pi} = \dfrac{\pi \cdot \frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi^2}{4}$

$E_1 = E_{OA\pi} - E_2 = \dfrac{\pi^2}{4} - 2$ Άρα $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$,



Γ 3. Είναι $f''(x) > 0$ στο (0,π) και f συνεχής στο [ο,π], άρα κυρτή στο [0,π], οπότε ισχύει: $f(x) > x - \pi$ για κάθε $x \in [0,\pi)$. Άρα θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1}{f(x) - x + \pi} = +\infty$ $\kappa\alpha\iota$ $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)+x\right) = \pi$, άρα $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} = +\infty$

Γ 4. Για κάθε $x \in [1,e] \subseteq [0,\pi]$ έχουμε

$f(x) > x - \pi \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} > 1 - \dfrac{\pi}{x} \Rightarrow \int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1 - \dfrac{\pi}{x}\right)dx = [x - \pi \ln x]_1^e =$

$= e - \pi \ln e - 1 + \pi \ln 1 = e - \pi - 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ 1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-1,0) και στο (0,π] με βάση τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

Για κάθε $x \in (0,\pi)$, $f'(x) = e^x\left(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$, αφού η συνάρτηση εφx είναι γνησίως αύξουσα.

και

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x} = \lim\limits_{x\to 0^-}[-(-x)^{\frac{1}{3}}] = 0$ Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0,

συνεπώς τα κρίσιμα σημεία είναι το **0** και το **3π/4 .**

Δ 2. Για κάθε $x \in [-1,0)$, $f'(x) < 0$. Για το διάστημα [ο,π] το πρόσημο της παραγώγου της f φαίνεται στον πίνακα:

X	-1	0	3π/4	π
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	↘	↗	↘	
	$f(-1)=1$	$f(0)=0$	$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$	$f(\pi)=0$
	τ.μ.	τ.ε.	τ.μ.	τ.ε.

Επειδή $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}} > 2$, που ισχύει, το σύνολο τιμών είναι το $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}]$

Δ 3. $\mathrm{E} = \int |e^x \eta\mu x - e^{5x}|dx$ όμως για κάθε $x \in [0,\pi]$, $e^x \eta\mu x - e^{5x} = e^x(\eta\mu x - e^{4x}) < 0$

αφού $e^{4x} \geq 1$ $\kappa\alpha\iota$ $\eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in [0,\pi]$ και αφού

$e^{4x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ θα είναι $\eta\mu x - e^{4x} < 0$

για κάθε $x \in [0,\pi]$.

Άρα, θα είναι $\mathrm{E} = \int_0^\pi e^{5x}\,dx - \int_0^\pi e^x \eta\mu x\,dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_o^\pi - \mathrm{I}$

όπου $\mathrm{I} = \left[e^x \eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x\,dx = \left[e^x \eta\mu x\right]_0^\pi - \left[e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi - \mathrm{I} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{I} = \frac{e^\pi}{2} + \frac{1}{2}$. Άρα $\mathrm{E} = \frac{e^{5\pi}-1}{5} - \frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}$ $\tau.\mu.$

Δ 4. $16e^{\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$

Προφανής ρίζα της εξίσωσης το $\frac{3\pi}{4}$ και είναι μοναδική αφού $f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \leq 0$

λόγω του συνόλου τιμών και $\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \geq 0$.