ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΟΜΑΔΑ Α)

Πέμπτη, 19/05/2016

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελίδα 87 (μόνο η περίπτωση ν=περιττός)

Α3.

α) Σωστό.

β) Λάθος.

γ) Σωστό.

δ) Σωστό.

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

Β1.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός υπαλλήλων ν_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i\nu_i$
0	5	5	25	0
1	4	9	20	4
2	2	11	10	4
3	4	15	20	12
4	5	20	25	20
ΣΥΝΟΛΑ	20		100	40

Έχουμε[1]:

$$\nu = 20\,,\ f_3 = \frac{10}{100} = 0{,}10 \text{ και επομένως (όπου ν το μέγεθος του δείγματος)}$$

$$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow \nu_3 = 20 f_3 \Leftrightarrow \nu_3 = 20 \cdot 0{,}10 \Leftrightarrow \nu_3 = 2$$

Β2. Έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{40}{20} = 2 \text{ (ή και } \overline{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 2\text{)}$$

Β3. Ο αριθμός των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες είναι η αθροιστική συχνότητα $N_4 = 15$ που αντιστοιχεί στην τιμή $x_4 = 3$ (ή αλλιώς $\sum_{i=1}^{3} \nu_i$ =5+4+2+4 ή ακόμα και $20 - \nu_5 = 15$).

Β4. Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες είναι $f_3 + f_4 + f_5 = (10 + 20 + 25)\% = 55\%$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Ζητούμε τις τιμές $f'(-1)$, $f'(1)$. Έχουμε:

$$f'(-1) = \frac{1 - (-1)^2}{((-1)^2 + 1)^2} = 0$$

$$f'(1) = \frac{1 - 1^2}{(1^2 + 1)^2} = 0$$

Γ3. Έχουμε:

[1] Τα έγχρωμα στοιχεία είναι αυτά που συμπληρώθηκα. Το ερώτημα δεν ζητάει δικαιολόγηση για κάθε αριθμό που συμπληρώνεται στο τετράγωνο.

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow\left(x=-1,\ x=1\right)$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow\left(-1<x<1\right)$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}<0\Leftrightarrow 1-x^2<0\Leftrightarrow\left(x<-1\ \acute{\eta}\ x>1\right)$$

(προφανώς $\left(x^2+1\right)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

Ο πίνακας μεταβολών-μονοτονίας της f είναι ο επόμενος:

x	$-\infty$	-1	1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
		Τ.Ελ.	Τ.Μεγ.

Άρα η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f (η οποία είναι και συνεχής στα σημεία $x_1=-1, x_2=1$) είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,\ 1]$.
- Γνησίως φθίνουσα στα διαστήματ $(-\infty,\ -1]$ και στο $[1,\ +\infty)$.
- Τοπικό Ελάχιστο στο $x_1=-1$, το $f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+1}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.
- Τοπικό Μέγιστο στο $x_2=1$,το $f(1)=\frac{1}{(-1)^2+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Γ4. Οι τιμές 2015 και 2016 ανήκουν στο διάστημα $2015,\ 2016\in[1,\ +\infty)$ στο οποίο η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως:

$$2015<2016\Rightarrow f(2015)>f(2016)$$

Δηλαδή, η τιμή $f(2015)$ είναι μεγαλύτερη από την τιμή $f(2016)$.

<u>Σημείωση:</u> Δεν απαιτείται υπολογισμός των $f(2015)$ και $f(2016)$ και μετά σύγκριση. Ωστόσο δεν είναι λάθος ο συλλογισμός αυτός.

ΘΕΜΑ 4ο

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$a = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-2)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} (x-2) = 4 - 2 = 2$$

Επομένως $a = 2$.

Δ2. Για $a = 2$ η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax - 3,\ x \in \mathbb{R}$ γίνεται $f(x) = x^2 + 2x - 3, x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με:

$$f'(x) = 2x + 2,\ x \in \mathbb{R}$$

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\left(-2,\ f(-2)\right)$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \kappa$ $(\lambda,\ \kappa \in \mathbb{R})$. Θα προσδιορίσουμε τα $\lambda,\ \kappa \in \mathbb{R}$.

Έχουμε:

$f(-2) = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$, επομένως το σημείο είναι $M\left(-2,\ -3\right)$.

$$\lambda = f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 2 = -4 + 2 = -2$$

Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M\left(-2,\ -3\right)$ οι συντεταγμένες του Μ θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα:

$$-3 = \lambda \cdot (-2) + \kappa \Leftrightarrow -3 = (-2) \cdot (-2) + \kappa \Leftrightarrow -3 = 4 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -7$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι $y = -2x - 7$

Δ4. Αφού τα σημεία $A_i\left(x_i,\ y_i\right), i = 1,2,3,4,5$ ανήκουν στην ευθεία $y = -2x - 7$ θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Επομένως:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2x_1 - 7 \\ y_2 &= -2x_2 - 7 \\ y_3 &= -2x_3 - 7 \\ y_4 &= -2x_4 - 7 \\ y_5 &= -2x_5 - 7 \end{aligned}$$

Επίσης για την μέση τιμή $\overline{x}$ των τετμημένων τους είναι:

$$\overline{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \ (1)$$

Τώρα για την ζητούμενη μέση τιμή των τεταγμένων τους $\overline{y}$ έχουμε:

$$\overline{y}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{5}=\frac{(-2x_1-7)+(-2x_2-7)+(-2x_3-7)+(-2x_4-7)+(-2x_5-7)}{5}=$$

$$=\frac{-2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)-5\cdot 7}{5}=\frac{-2\cdot 10-35}{5}=\frac{-55}{5}=-11$$

Άρα $\overline{y}=-11$

Επιμέλεια λύσεων : www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών