ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (Γ.Π.) Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
Φυλλάδιο $7^{\text{ο}}$: Κεφ. 3 - Πιθανότητες

1) Από το σύνολο $A=\{1,2\}$ επιλέγουμε τυχαία ψηφία και κατασκευάζουμε έναν τριψήφιο αριθμό. Να βρεθούν:
i) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος.
ii) Τα ενδεχόμενα: Α: «Ακριβώς δυο ψηφία να είναι 1» ,
Β: «Ένα τουλάχιστον ψηφίο είανι 2».
iii) Τα ενδεχόμενα $A\cup B$, $A\cap B$, A' , B' , $A'\cap B$, $B-A$,
$(A\cup B)'$, $(A-B)\cup(B-A)$, $(A\cap B)'$.

2) Ένας κουμπαράς έχει 10 νομίσματα: 3 των 50 ευρώ , 4 των 100 ευρώ και 3 των 20 ευρώ. Παίρνουμε ένα νόμισμα στην τύχη. Να βρεθεί η πιθανότητα:
i) Να είναι των 50 ευρώ ή των 20 ευρώ.
ii) Να μην είναι ούτε των 50 ούτε των 100 ευρώ.

3) Σε μια κοινότητα το 40% των κατοίκων της καπνίζει , το 32% πίνει και το 60% καπνίζει ή πίνει. Ποιο είναι το ποσοστό των κατοίκων που και καπνίζουν αλλά και πίνουν;

4) Διαλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη. Η πιθανότητα να έχει κινητό τηλέφωνο είναι 40% , η πιθανότητα να έχει μηχανάκι είναι 35%, ενώ η πιθανότητα να έχει και τα δύο είναι 10%. Να βρεθεί η πιθανότητα:
i) Να έχει ένα τουλάχιστον από τα δυο.
ii) Να μην έχει κινητό τηλέφωνο.
iii) Να μην έχει μηχανάκι.
iv) Να μην έχει κανένα από τα δυο.
v) Να έχει μόνο ένα από τα δυο.
vi) Να έχει κινητό αλλά όχι μηχανάκι.

5) Σε μια τάξη 30 μαθητών , οι 20 δεν συμπαθούν τα μαθηματικά , οι 14 δεν συμπαθούν τα φιλολογικά και οι 5 δεν συμπαθούν ούτε τα μαθηματικά ούτε τα φιλολογικά μαθήματα. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της τάξης αυτής, να βρείτε την πιθανότητα να συμπαθεί και τα μαθηματικά και τα φιλολογικά μαθήματα.

6) Ένα κουτί περιέχει 12 άσπρες , x κόκκινες και y πράσινες σφαίρες. Αν επιλέξουμε τυχαία μια σφαίρα, η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι ½ και η πιθανότητα να είναι πράσινη είναι $1/3$. Να βρείτε τα x και y.

7) Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα
$A=\{\omega_2,\omega_3\}$ *και* $B=\{\omega_2,\omega_4\}$.
Αν είναι $P(A)=\frac{5}{8}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ *και* $P(\omega_2)=\frac{1}{6}$, να βρεθεί το $P(\omega_1)$.

8) Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύουν:

$P(A) = 2P(A')$, $P(B) = \frac{1}{2}$ *και* $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.

Να βρεθούν οι πιθανότητες: $P(A)$, $P(B')$, $P(A \cup B)$, $P(B - A)$, $P(B' \cap A)$.

9) Για τα ενδεχόμενα Α και Β ισχύουν: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$.

Δείξτε ότι $0 \le P(A \cap B) \le \frac{1}{4}$.

10) Για τα ενδεχόμενα Α , Β ισχύουν: P(A) = 0,4 και P(B) = 0,7.

i) Είναι τα Α και Β ασυμβίβαστα;

ii) Δείξτε ότι $0,1 \le P(A \cap B) \le 0,4$.

11) Αν Α ,Β ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ *και* $P(A') = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις πιθανότητες

$P(A)$, $P(B)$, $P(B' \cap A)$, $P(A' \cup B')$.

12) Έστω Α , Β ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω με $P(A) \ne 0$.

Αν ισχύουν $\frac{P(A')}{P(A)} \le \frac{2}{3}$ *και* $P(B) \ge 2P(B')$, τότε:

i) Να εξετάσετε αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

ii) Να αποδειχθεί ότι: $P(A \cup B) \ge \frac{2}{3}$.

13) Ένα κουτί περιέχει 40 μπάλες από τις οποίες οι 20 είναι άσπρες , οι 10 είναι μαύρες και οι υπόλοιπες είναι πράσινες ή κόκκινες. Επιλέγουμε από το κουτί μια μπάλα στην τύχη. Αν είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να επιλεγεί κόκκινη μπάλα είναι $\frac{\lambda}{3\lambda + 4}$ και η πιθανότητα να επιλεγεί πράσινη είναι $\frac{\lambda - 1}{9\lambda + 2}$, *με* $\lambda \in \mathbb{N}^*$, να βρείτε πόσες κόκκινες και πόσες πράσινες μπάλες περιέχει το κουτί.

14) Έστω $\Omega = \{0,1,2,3\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με $P(1) = 2P(2) = 4P(3) = \frac{1}{2}$,

α) Υπολογίστε την πιθανότητα P(0).

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 3(\lambda^2 - 4\lambda)x^2 + 12x - 3\lambda$ και τα ενδεχόμενα Α και Β του δειγματικού χώρου Ω με:

$A = \{\lambda \in \Omega \ / \ \eta\ f\ \text{έχει ακρότατο για}\ x = 1\}$

$B = \{\lambda \in \Omega \ / \ \eta\ \text{καμπύλη της}\ f\ \text{διέρχεται απο το σημείο}\ M(1,2)\}$.

i) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α και Β.

ii) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(B - A)$.

iii) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστ