ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Τετάρτη 20/5/2015

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1.) Θεωρία, σελ 31 , **Α2.)** Θεωρία σελ.22 , **Α3.)** Θεωρία σελ. 87

Α4.) α. Λ , β. Σ , γ. Λ , δ. Λ , ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.) $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \ \eta \ \ 8x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=\frac{1}{4}$$

Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι το $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ και αφού οι πιθανότητες των ενδεχομένων $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, A , $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ αποτελούν το παραπάνω σύνολο, τότε:

Επειδή $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq\mathrm{A}\subseteq\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ ισχύει $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le P(\mathrm{A})\le P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

Άρα θα είναι $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4}$, $P(\mathrm{A})=\frac{1}{3}$, $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{1}{2}$.

Β2.) $P(\mathrm{A}'-\mathrm{B}')=P(\mathrm{A}')-P(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}')=1-P(\mathrm{A})-P\left((\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'\right)=$

$$=1-P(\mathrm{A})-1-P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

Είναι $\Delta=(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})'$ Άρα $P(\Delta)=1-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Β3.) Τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}-\mathrm{B}$, $\mathrm{B}-\mathrm{A}$ είναι ασυμβίβαστα, άρα θα έχουμε: $P(\mathrm{E})=P\left[(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})\right]=$

$$=P(\mathrm{A})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-2P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Β4.) Είναι $9x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\ \eta\ \ x=-\frac{1}{3}<0$

Άρα θα είναι $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$ Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα. Τότε από τον προσθετικό νόμο θα έχουμε:

$P(\mathrm{B}\cup\Gamma)=P(\mathrm{B})+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{13}{12}>1$ Άτοπο, άρα τα ενδεχόμενα Β και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.) Είναι

$$f_1\%=10\ ,\ f_5\%=30\ \ ,\ \alpha_3=108^\circ \Leftrightarrow f_3=\frac{108}{360}\Leftrightarrow f_3=0,3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_3\%=30\ .$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\sum_{i=1}^{5} f_i=1\Leftrightarrow f_2=0,3-f_4$, (1)

$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 14 \Leftrightarrow 9 \cdot 0,1 + 11\left(0,3 - f_4\right) + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 =$

$= 14$, Άρα θα είναι $4f_4 = 0,8 \Leftrightarrow f_4 = 0,2 \Leftrightarrow f_4\% = 20$.

Από τη σχέση (1) έχουμε: $f_2\% = 10$

Γ2.) Η διακύμανση είναι $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \nu_i = \sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i =$

$$= (9-14)^2 \cdot 0,1 + (11-14)^2 \cdot 0,1 + (13-14)^2 \cdot 0,3 + (15-14)^2 \cdot 0,2 +$$

$$+ (17-14)^2 \cdot 0,3 = 6,6$$

Δηλαδή $s^2 = 6,6 \Leftrightarrow s = \sqrt{6,6} \simeq 2,57$

Άρα, $CV = \frac{s}{\left|\bar{x}\right|} \cdot 100\% = \frac{2,57}{14} \cdot 100\% = 18,357\% > 10\%$

Συνεπώς, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3.) $\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i + x_5 \nu_5\right) = 14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1780}{\nu} + 17 \cdot f_5 = 14 \Leftrightarrow \nu = 200$.

Γ4.) Από την εφαρμογή 3 σελ. 99 αλλά και την άσκηση 4 σελ.103 του σχολικού βιβλίου έχουμε:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad s_\beta = \left|\frac{1}{s_\alpha}\right| s_\alpha = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.) Η γωνία $\widehat{\Delta \mathrm{AB}}=90^{\circ}$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Άρα ΔΒ διάμετρος του κύκλου και ΔΒ=10.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $(\mathrm{A}\Delta)^2+(\mathrm{AB})^2=(\Delta\mathrm{B})^2 \Leftrightarrow$

$$(\mathrm{A}\Delta)^2+x^2=100 \Leftrightarrow (\mathrm{A}\Delta)^2=100-x^2 \Leftrightarrow \mathrm{A}\Delta=\sqrt{100-x^2}$$

Αφού (ΑΔ)>0. Αν $f(x)$ το εμβαδόν του ορθογωνίου τότε θα είναι

$f(x)=x\sqrt{100-x^2}$, $\mu\varepsilon \ \ x>0 \quad \kappa\alpha\iota \ \ 100-x^2>0$, Ισοδύναμα

$x^2<100 \Leftrightarrow |x|<10 \Leftrightarrow -10<x<10$ και αφού είναι χ>0 θα ισύει

$0<x<10$.

Δ2.) Η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,10) με

$$f'(x)=\sqrt{100-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 100-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2=50 \Leftrightarrow x=5\sqrt{2}$$

$$f'(x)=0>100-2x^2>0 \Leftrightarrow x^2<50 \Leftrightarrow x<5\sqrt{2}$$

Έτσι έχουμε τον πίνακα μονοτονίας της f

X	0		$5\sqrt{2}$		10
f'		+		-	
f		↗		↘	

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=5\sqrt{2}$. Τότε,

$$\text{ΑΔ} = \sqrt{100-50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = \text{ΑΒ}\ .$$

Άρα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} = \dfrac{1}{98}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x} = \dfrac{1}{98}f'(1) =$

$$= \frac{1}{98}\cdot\frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}\ .$$

Δ4.) Από το Δ2 στο διάστημα $(0\ ,\ 5\sqrt{2}]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Επίσης $\dfrac{P(\text{Α}-\text{Β})}{\sqrt{100-P^2(\text{Α})}} < 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \dfrac{P(\text{Α})}{\sqrt{100-P^2(\text{Α}-\text{Β})}} < 1$

και $1 < 5\sqrt{2}$. Άρα θα έχουμε:

$$f\left(\frac{P(\text{Α}-\text{Β})}{\sqrt{100-P^2(\text{Α})}}\right) \le f\left(\frac{P(\text{Α})}{\sqrt{100-P^2(\text{Β}-\text{Α})}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(\text{Α}-\text{Β})}{\sqrt{100-P^2(\text{Α})}} \le \frac{P(\text{Α})}{\sqrt{100-P^2(\text{Α}-\text{Β})}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\text{Α}-\text{Β})\sqrt{100-P^2(\text{Α}-\text{Β})} \le P(\text{Α})\sqrt{100-P^2(\text{Α})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(P(\text{Α}-\text{Β})\right) \le f\left(P(\text{Α})\right) \Leftrightarrow P(\text{Α}-\text{Β}) \le P(\text{Α}) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow P(\text{Α}) - P(\text{Α}\cap\text{Β}) \le P(\text{Α}) \Leftrightarrow P(\text{Α}\cap\text{Β}) \ge 0$ που ισχύει.

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς – Μαθηματικός