

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 5(ΠΕΝΤΕ)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Αν x_1, x_2, \dots, x_n είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και w_1, w_2, \dots, w_n είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, b)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, b) , τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (a, b) για $x = x_0$.

β) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων A και B ισχύει $CV_B > CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα B εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα A .
- ε) Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B » δηλώνει ότι $A \subseteq B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω A, B και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A, A \cap B$ και $A \cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x - 1) \cdot (8x^2 - 6x + 1) = 0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$9x^2 - 3x - 2 = 0.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 5

B2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' - B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου

Δ : «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B ».

Μονάδες 8

B3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

E : «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B ».

Μονάδες 6

B4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ι**, όπου $f_i\%$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανομημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3^η κλάση είναι 108° .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 14$.

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Κλάσεις	$f_i\%$
[8 , 10)	
[10 , 12)	
[12 , 14)	
[14 , 16)	
[16 , 18)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\%=10, f_2\%=10, f_3\%=30, f_4\%=20, f_5\%=30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα Ι συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \approx 2,57$.

Μονάδες 7

Γ3. Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 τα κέντρα της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα και v_1, v_2, v_3 και v_4 οι συχνότητες της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα. Αν $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780$, βρείτε το πλήθος n των παρατηρήσεων του δείγματος.

Μονάδες 5

Γ4. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα n παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{\alpha}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και S_α την τυπική τους απόκλιση.

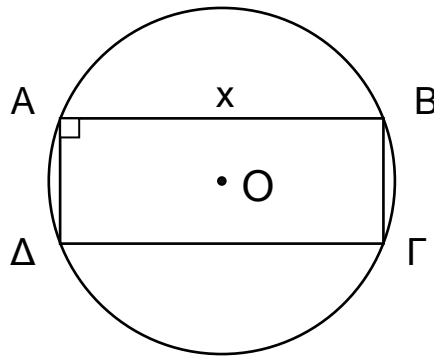
Εάν $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}$, για $i=1, 2, 3, 4, 5$, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του δείγματος

$\beta_i, i=1, 2, 3, 4, 5$ είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση S_β είναι ίση με 1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με κέντρο O και ακτίνα $\rho=5$ και ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB=x$, όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x , δείξτε ότι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A-B) > 0$, να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right).$$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ