

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

Εξεταζόμενο μάθημα: **Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας**

Παρασκευή 20/5/2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150-151

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150-151

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 40




A4. α. Σωστό , β. Λάθος , γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο \mathbb{R} με $f'(x) = x^2 - 5x + 6$

$$\text{Θέτουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 3$$

Με βάση το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				
		Τοπ. μέγιστο	Τοπ. ελάχιστο	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$.

Επίσης, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=2$ το $y = f(2) = \frac{11}{3}$ και

τοπικό ελάχιστο στο $x=3$ το $y = f(3) = \frac{7}{2}$.

B2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$, δηλαδή στο

$A(0, -1)$ είναι της μορφής $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$ με $\alpha = f'(0) = 6$.

Επομένως είναι η $y = 6x + \beta$

Όμως η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0, -1) \in (\varepsilon)$, δηλαδή

ισοδύναμα έχουμε: $-1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$.

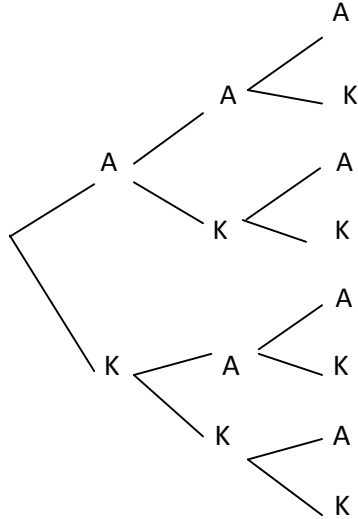
Τελικά, η ευθεία είναι: $y = 6x - 1$.

B3. Για το όριο έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 6) = -7 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. 1^ο παιδί, 2^ο παιδί, 3^ο παιδί



Άρα ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

Γ2. $A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$

$$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$$

$$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$$

Γ3. α) Προκύπτει ότι

$$\Delta = A \cap B = \{KAK, KKA, KKK\}$$

$$E = A \cup B = \{AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

$$Z = \Gamma - E = \{AAA, AAK\}$$

Έχουμε ότι: $N(\Omega) = 8$, $N(\Delta) = 3$, $N(E) = 5$, $N(Z) = 2$

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθانا παίρνουμε:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$$

$$P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

β) Έχουμε ότι: $H = (A \cup B)' = E' = \{AAA, AAK, AKA\}$
 $\Theta = (A - B) \cup (B - A) = \{KAA\} \cup \{AKK\} = \{KAA, AKK\}$

Επομένως: $P(H) = \frac{N(H)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$ και $P(\Theta) = \frac{N(\Theta)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε ότι οι κλάσεις είναι της μορφής: $[8, 8+c), [8+c, 8+2c),$
 $[8+2c, 8+3c)$ και $[8+3c, 8+4c)$

Για την κεντρική τιμή x_2 της δεύτερης κλάσης ισχύει:

$$x_2 = \frac{8+c+8+2c}{2} = 14 \Leftrightarrow \frac{16+3c}{2} = 14 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$$

Δ2. Επομένως οι κλάσεις είναι: $[8, 12), [12, 16), [16, 20)$ και $[20, 24)$.

Αν v το πλήθος των παρατηρήσεων τότε είναι:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \Leftrightarrow v = 45 + v_4 \quad , \quad (1)$$

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{v} (10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22 \cdot v_4) = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 590 + 22v_4 = 14v$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Leftrightarrow 590 + 22v_4 = 14(45 + v_4) \Leftrightarrow 8v_4 = 40 \Leftrightarrow v_4 = 5 \quad \text{και} \quad v = 50$$

Ο πίνακας γίνεται:

$[\alpha, \beta)$	x_i	v_i
$[8, 12)$	10	20
$[12, 16)$	14	15
$[16, 20)$	18	10
$[20, 24)$	22	5
ΣΥΝΟΛΟ		50

Δ3. Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στις κλάσεις, οι υπολογιστές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά είναι όσοι ανήκουν στο διάστημα $[9, 24)$, δηλαδή $[9, 12)$ που είναι υποδιάστημα της 1ης κλάσης καθώς και οι παρατηρήσεις που ανήκουν στις κλάσεις $[12, 16), [16, 20)$ και $[20, 24)$.

Έστω x το πλήθος των υπολογιστών που έτρεξαν το πρόγραμμα σε χρόνο που ανήκει στο διάστημα $[9,12)$

$$\text{Έχουμε: } x = \frac{12-9}{12-8} = \frac{x}{20} \Leftrightarrow x = 15$$

Επίσης, $v_2 + v_3 + v_4 = 30$ υπολογιστές έτρεξαν το πρόγραμμα σε χρόνο που ανήκει στο διάστημα $[12,24)$.

Συνεπώς, $15+30=45$ υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά.

Δ4. Για τη διακύμανση s^2 των παρατηρήσεων έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 v_i = \frac{16 \cdot 20 + 0 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 64 \cdot 5}{50} = 16$$

$$\text{Συνεπώς } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 0,28 = 28\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Έστω t_i , με $i=1,2,\dots,50$ οι αρχικές παρατηρήσεις και y_i με $i=1,2,\dots,50$ οι νέες παρατηρήσεις. Θα είναι τότε:

$$y_i = \frac{80}{100} t_i \Leftrightarrow y_i = \frac{4}{5} t_i \text{ για κάθε } i=1,2,\dots,50.$$

Με βάση γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου προκύπτει:

$$\bar{y} = \frac{4}{5} \bar{x} \quad \text{και} \quad s_y = \left| \frac{4}{5} \right| s = \frac{4}{5} s$$

Έτσι, ο συντελεστής μεταβολής του νέου δείγματος χρόνων είναι:

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{\frac{4}{5} s}{\frac{4}{5} \bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = CV = \frac{2}{7} \approx 0,28 = 28\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς - Μαθηματικός