ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

Εξεταζόμενο μάθημα: Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας

Παρασκευή 20/5/2016

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1.Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150-151
Α2.Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150-151
Α3.Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 40
Α4. α. Σωστό , β. Λάθος , γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=x^2-5x+6$
Θέτουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \ , \ x=3$

Με βάση το πρόσημο του τριωνύμου προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	↗		↘		↗
		Τοπ.μέγιστο		Τοπ. ελάχιστο	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα (−∞,2] και [3,+∞) και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [2,3].

Επίσης, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=2 το $y=f(2)=\frac{11}{3}$ και

τοπικό ελάχιστο στο $x=3 \ \text{το} \ y=f(3)=\frac{7}{2}$.

Β2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\left(0,f(0)\right)$, δηλαδή στο Α(0,-1) είναι της μορφής $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$ με $\alpha=f'(0)=6$.

Επομένως είναι η $y=6x+\beta$
Όμως η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,-1)\in(\varepsilon)$, δηλαδή
ισοδύναμα έχουμε: $-1=6\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$.
Τελικά, η ευθεία είναι: $y=6x-1$.

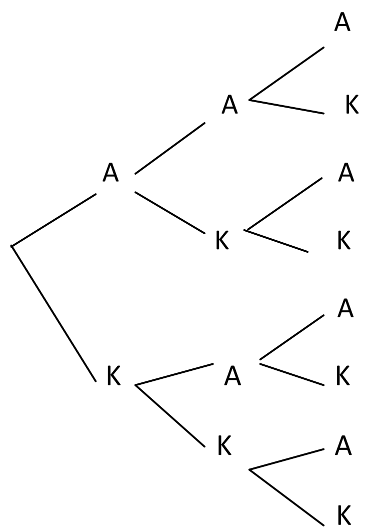
Β3. Για το όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-6)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}(x-6)=-7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. 1^o παιδί , 2^o παιδί , 3^o παιδί



Άρα ο δειγματικός χώρος είναι

$\Omega=\{AAA\ ,\ AAK\ ,\ AKA\ ,\ AKK\ ,\ KAA\ ,\ KAK\ ,\ KKA\ ,\ KKK\}$

Γ2. $A=\{KAA,KAK,KKA,KKK\}$

$B=\{AKK,KAK,KKA,KKK\}$

$\Gamma=\{AAA,AAK,KKA,KKK\}$

Γ3. α) Προκύπτει ότι

$\Delta=A\cap B=\{KAK,KKA,KKK\}$

$E=A\cup B=\{AKK,KAA,KAK,KKA,KKK\}$

$Z=\Gamma-E=\{AAA,AAK\}$

Έχουμε ότι: $N(\Omega)=8$, $N(\Delta)=3$, $N(E)=5$, $N(Z)=2$

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα παίρνουμε:

$$P(\Delta)=\frac{N(\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{3}{8}$$

$$P(E)=\frac{N(E)}{N(\Omega)}=\frac{5}{8}$$

$$P(Z)=\frac{N(Z)}{N(\Omega)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

β) Έχουμε ότι: $\mathrm{H} = \left(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\right)' = \mathrm{E}' = \{\mathrm{AAA}, \mathrm{AAK}, \mathrm{AKA}\}$

$\Theta = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A}) = \{\mathrm{KAA}\} \cup \{\mathrm{AKK}\} = \{\mathrm{KAA}, \mathrm{AKK}\}$

Επομένως: $P(\mathrm{H}) = \dfrac{\mathrm{N(H)}}{\mathrm{N}(\Omega)} = \dfrac{3}{8} \quad \kappa\alpha\iota \quad P(\Theta) = \dfrac{\mathrm{N}(\Theta)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε ότι οι κλάσεις είναι της μορφής: [8,8+c),[8+c,8+2c), [8+2c,8+3c) και [8+3c,8+4c)

Για την κεντρική τιμή x_2 της δεύτερης κλάσης ισχύει:

$$x_2 = \frac{8+c+8+2c}{2} = 14 \Leftrightarrow \frac{16+3c}{2} = 14 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$$

Δ2. Επομένως οι κλάσεις είναι: [8,12),[12,16),[16,20) και [20,24).

Αν ν το πλήθος των παρατηρήσεων τότε είναι:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 \Leftrightarrow \nu = 45 + \nu_4 \quad , \quad (1)$$

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\left(10 \cdot 20 + 14 \cdot 15 + 18 \cdot 10 + 22 \cdot \nu_4\right) = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 590 + 22\nu_4 = 14\nu$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1) προκύπτει:

$$\Leftrightarrow 590 + 22\nu_4 = 14(45 + \nu_4) \Leftrightarrow 8\nu_4 = 40 \Leftrightarrow \nu_4 = 5 \quad \kappa\alpha\iota \quad \nu = 50$$

Ο πίνακας γίνεται:

[α,β)	x_i	ν_i
[8,12)	10	20
[12,16)	14	15
[16,20)	18	10
[20,24)	22	5
ΣΥΝΟΛΟ		50

Δ3. Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις, οι υπολογιστές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά είναι όσοι ανήκουν στο διάστημα [9,24),δηλαδή [9,12) που είναι υποδιάστημα της 1ηςκλάσης καθώς και οι παρατηρήσεις που ανήκουν στις κλάσεις [12,16),[16,20) και [20,24).

Έστω x το πλήθος των υπολογιστών που
έτρεξαν το πρόγραμμα σε χρόνο που ανήκει στο διάστημα [9,12)

Έχουμε: $x = \frac{12-9}{12-8} = \frac{x}{20} \Leftrightarrow x = 15$

Επίσης, $\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 30$ υπολογιστές έτρεξαν το πρόγραμμα σε χρόνο που ανήκει στο διάστημα [12,24).

Συνεπώς, 15+30=45 υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά.

Δ4. Για τη διακύμανση s^2 των παρατηρήσεων έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \nu_i = \frac{16\cdot 20 + 0\cdot 15 + 18\cdot 10 + 64\cdot 5}{50} = 16$$

Συνεπώς $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$.

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \simeq 0,28 = 28\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5. Έστω t_i , με $i = 1, 2, \cdots, 50$ οι αρχικές παρατηρήσεις και y_i με $i = 1, 2, \cdots, 50$ οι νέες παρατηρήσεις. Θα είναι τότε:

$$y_i = \frac{80}{100} t_i \Leftrightarrow y_i = \frac{4}{5} t_i \text{ για κάθε } i = 1, 2, \cdots, 50.$$

Με βάση γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου προκύπτει:

$$\bar{y} = \frac{4}{5}\bar{x} \quad \kappa\alpha\iota \quad s_y = \left|\frac{4}{5}\right| s = \frac{4}{5} s$$

Έτσι, ο συντελεστής μεταβολής του νέου δείγματος χρόνων είναι:

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{\frac{4}{5}s}{\frac{4}{5}\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = CV = \frac{2}{7} \simeq 0,28 = 28\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς - Μαθηματικός