

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

A) Θεώρημα σελ. 251

B) Ορισμός σελ. 213

Γ) α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ 2

A) α) Έστω $x = 2\lambda + 1, y = 2\lambda - 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda = \frac{x-1}{2} \quad \text{Άρα} \quad y = 2 \frac{x-1}{2} - 1 \Leftrightarrow y = x - 2$$

β) Η κάθετη στην $y = x - 2$ που πέρνα από το $O(0,0)$ είναι $y = \lambda \cdot x$ με $\lambda = -1$

Άρα $y = -1 \cdot x$

Όποτε :

$$\begin{cases} y = -1x \\ y = x - 2 \end{cases} \quad x - 2 = -x \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = -1$$

Επομένως $Z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

B) Έστω ότι $w = x + y \cdot i$ τότε: $|w|^2 + \overline{w} - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$

$$x^2 + y^2 + x - y \cdot i - 12 = 1 - i$$

Συνεπώς

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 - x - 12 = 1 \\ -y = -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2 + 1 - x - 12 = 1 \\ y = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = -3 \\ \eta \\ \chi = 4 \end{array}$$

Άρα $w_1 = -3 + i$ $w_2 = 4 + i$

ΘΕΜΑ 3

A) Έχουμε $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$

Επειδή επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = a^x \cdot \ln a - \frac{1}{x+1}$ τότε σύμφωνα με το Θ. Fermat :

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^0 \ln a - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$

B) Για $a = e$, $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, $x > -1$

α) $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

Άρα η f κυρτή στο $\Delta = (0, +\infty)$

β) Αφού f κυρτή τότε η $f' \uparrow$ και αφού $f'(0) = 0$ τότε το 0 είναι μοναδική ρίζα της f' και για το πρόσημο της f' έχουμε :

• $x \in (-1, 0)$ με $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) = 0$

- $x \in (0, +\infty)$ με $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	↓	↑	

$f(0) = 1$

Γ) Έστω η εξίσωση : $\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow$

$$(x - 2)[f(\beta) - 1] + (x - 1)[f(\gamma) - 1] = 0$$

Έστω τώρα η συνάρτηση $g(x) = (x - 2)[f(\beta) - 1] + (x - 1)[f(\gamma) - 1]$ στο $[1, 2]$

- Η g συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυώνυμο
- $g(1) = -f(\beta) + 1 < 0$ διότι $f(\beta) > 1 \Leftrightarrow f(\beta) - 1 > 0, \beta \neq 0$
- $g(2) = f(\gamma) - 1 > 0$ διότι $f(\gamma) > 1$ με $\gamma \neq 0$

(αφού $f(0) = 1$ ολικό ελάχιστο της f)

Άρα $g(1)g(2) < 0$, επομένως από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ δηλαδή x_0 ρίζα της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ 4

α) Η G με τύπο $G(x) = \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3$ ως πράξεις συνεχών στο $(0, 2]$

$H(x) = \int_0^x tf(t)dt$ συνεχής, αφού η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη, διότι $tf(t)$ συνεχής.

Ακόμη $\int_0^x f(t)dt$ συνεχής.

Στο $x_0 = 0$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right) = L$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x}$ έχει απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$

Άρα από πρώτο κανόνα De L'hospital έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(H(x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x t f(t) dt \right)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot f(x)) = 0 \cdot f(0) = 0$$

αφού f συνεχής στο $x_0 = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} = 0$

Όποτε $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t) dt + 3 = 3$

Ακόμη $G(0) = 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-t^2})(1 + \sqrt{1-t^2})}{(1 + \sqrt{1-t^2}) \cdot t^2}$

$$= 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = 6 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1-0^2}} = 3$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0)$, επομένως G συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα η G συνεχής στο $[0,2]$

β) Η G παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με παράγωγο : $G'(x) = \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right)' =$

$$= \frac{H'(x) \cdot x - H(x) \cdot (x)'}{x^2} - f(x) = \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} = -\frac{H(x)}{x^2}$$

γ) Έστω ότι δεν υπάρχει $a \in (0,2) : H(a) = 0$ τότε $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2} \neq 0, \quad \forall x \in (0,2)$

Αφού $G'(x)$ συνεχής και δεν μηδενίζεται τότε διατηρεί πρόσημο. Άρα η G γνησίως μονότομη στο $[0,2]$. Άρα η G είναι «ένα προς ένα».

Όμως • $G(0) = 3$

$$\bullet G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 \Leftrightarrow$$

Και

$$G(2) = \frac{1}{2} \int_0^2 tf(t)dt - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 (t-2)f(t)dt \right) + 3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3$$

Ατοπο

δ) $G(x) : [0, a]$

• Η $G(x) = \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3$ συνεχής στο $[0, a]$

• Η G παραγωγίσιμη με $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0, a)$ τέτοιο ώστε :

$$G'(\xi) = \frac{G(a) - G(0)}{a - 0} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(a)}{a} - \int_0^a f(t)dt + 3 - 3}{a} \Leftrightarrow$$

$$a \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^a f(t)dt$$