

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Φυλλάδιο 14^ο : Κεφ.3- Παρ.3.4,3.5, 3.7 – Ορισμένο Ολοκλήρωμα.

1) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^2 x\sqrt{2-x} dx$, ii) $\int_0^5 \frac{1}{x^2-6x+9} dx$, iii) $\int_0^1 xe^{-2x} dx$,
iv) $\int_0^\pi x|\sin x| dx$, v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \eta\mu 2x}{1+2\eta\mu x} dx$, vi) $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\eta\mu x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$
vii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\eta\mu x} dx$, viii) $\int_{-1}^{10} \frac{x}{1+|x|} dx$.

2) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = \alpha$

σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με $x_1 = \beta$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Αν η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta f''(x) dx .$$

3) α) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [f(x) + f(\alpha + \beta - x)] dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{2004^x}{2004^x + 2004^{1+e-x}} dx$.

4) Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_1^{2x} \sqrt{t-1} dt$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B) Να βρείτε την παράγωγό της.

Γ) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

5) Δίνεται η συνάρτηση g , η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} και η συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x (x-t) \cdot g(t) dt$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

6) Αν είναι $g(x) = \int_1^x f\left(\frac{t}{x}\right) dt$ όπου f συνεχής συνάρτηση και το σημείο

$A(1, 2004) \in C_f$ να βρείτε το $g'(1)$.

7) Αν είναι $g(x) = \int_1^x \sigma\upsilon\nu(\pi xt) dt$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $\Sigma(1, g(1))$.

8) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha \int_1^\alpha \frac{1}{x^2} f\left(\frac{\alpha}{x}\right) dx = \int_1^\alpha f(x) dx$$

9) Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} και για τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt \text{ ισχύει } F(\alpha) = F(\beta) \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha < \beta, \text{ να}$$

αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

10) Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει η σχέση

$f'(x) = g'(x) + 3x^2 - 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων τέμνονται στο σημείο με τετμημένη 1, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g .

11) Α) Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x \cdot f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 + 2003 + \int_1^x f(t) dt, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f του ερωτήματος Α), τον άξονα $\chi\chi$ και την ευθεία $x = 1$.

12) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε

$$x \in \mathbb{R} \text{ και η συνάρτηση } g, \text{ τέτοια ώστε } g(x) = \int_\alpha^x (x - \beta) f(t) dt.$$

Αν η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(\beta, g(\beta))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $2004x + y - 2003 = 0$.

Α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $\chi\chi$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Β) Να βρείτε το σημείο $A(\beta, g(\beta))$.

Γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\int_\alpha^\xi f(t) dt = (\beta - \xi) \cdot f(\xi)$$