ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι ΕΠΑ.Λ.
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ
Πέμπτη 23/5/2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Ορισμός σελ. 234

Α2. α. .Σ , β. Σ , γ. Λ , δ. Λ , ε. Σ

Α3. α. $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x\,dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{\alpha}^{\beta} = \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta$

β. $(c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x)$

γ. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim_{x\to 1^-}(\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2\cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2 + 0 = \alpha^2$

Β2. $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3})^2-2^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} =$

$= \lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \frac{\sqrt{1+3}+2}{1} = 4$.

Β3. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

με $f(1) = \alpha^2\cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2 + 0 = \alpha^2$

Άρα $\alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \sqrt{4} \Rightarrow \alpha = \pm 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. ν=25+17+6+2=50

$f_1\% = \frac{25}{50}\cdot 100 = 50\%$, $f_2\% = \frac{17}{50}\cdot 100 = 34\%$, $f_3\% = \frac{6}{50}\cdot 100 = 12\%$

$f_4\% = \frac{2}{50}\cdot 100 = 4\%$.

Μισθός (Εκατοντάδες €) x_i	Αριθμός Υπαλλήλων ν_i	Σχετ.συχν % $f_i\%$	$x_i \nu_i$
6	25	50	150
10	17	34	170
15	6	12	90
20	2	4	40
Σύνολα	ν=50	100	450

Γ2. $\bar{x} = \frac{450}{50} = 9$ εκατοντάδες €.

Γ3. $50\% + 34\% = 84\%$.

Γ4. $s^2 = \frac{(9-6)^2\cdot 25 + (9-10)^2\cdot 17 + (9-15)^2\cdot 6 + (9-20)^2\cdot 2}{50} =$

$$=\frac{225+17+216+242}{50}=\frac{700}{50}=14.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\left[(x-2)^2\right]'(x+\alpha)+(x-2)^2(x+\alpha)'=2(x-2)(x+\alpha)+(x-2)^2=$

$=(x-2)(2x+2\alpha+x-2)=(x-2)(3x+2\alpha-2)\quad,\quad x\in\mathbb{R}.$

Δ2. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $x_0=4$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, από θεώρημα Fermat θα έχουμε:

$$f'(4)=0\Leftrightarrow 2(12+2\alpha-2)=0\Leftrightarrow \alpha=-5.$$

Δ3. Για $\alpha=-5$ έχουμε $f(x)=(x-2)^2(x-5)$ και $f'(x)=(x-2)(3x+2)\ ,\ x\in\mathbb{R}$

Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-2)(3x-12)=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$.

Από τον πίνακα μονοτονίας της f έχουμε:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
f'		+		-		+	
f		↗	0 τ.μ.	↘	-4 τ.ε.	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(4,+\infty)$ και Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2,4]$.

Στη θέση $x_0=2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2)=0$, ενώ στην θέση $x_0=4$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(4)=-4$.

Δ4. Έχουμε $g(x)=h(x)\Leftrightarrow g(x)-h(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-18x+24=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-6x+8\right)=0\Leftrightarrow 3(x-2)(x-4)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$

Άρα

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_2^4|g(x)-h(x)|\,dx=\int_2^4|f'(x)|\,dx=-\int_2^4 f'(x)\,dx=-\left(f(4)-f(2)\right)=4\text{ τ.μ.}$$

<u>Β τρόπος</u>

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_2^4|g(x)-h(x)|\,dx=\int_2^4\left|3x^2-12x-(6x-24\right|dx=-3\int_2^4(x^2-6x+8)\,dx=-3\left[\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}+8x\right]_2^4=$$

$=........=4$ τ.μ.

Είναι $g(x)-f(x)=3x^2-18x+24=3(x^2-6x+8)=3(x-2)(x-4)$ και είναι εταιρόσημο του $\alpha=3>0$, εντός των ριζών 2 και 4.

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς
Μαθηματικός