

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι ΕΠΑ.Λ.
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ
 Πέμπτη 23/5/2013

ΘΕΜΑ Α

A1. Ορισμός σελ. 234

A2. α. Σ , β. Σ , γ. Λ , δ. Λ , ε. Σ

A3. α. $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x \, dx = [-\sigma \upsilon \nu x]_{\alpha}^{\beta} = \sigma \upsilon \nu \alpha - \sigma \upsilon \nu \beta$

β. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

γ. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

ΘΕΜΑ Β

B1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2 \cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2 + 0 = \alpha^2$

B2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x+3-4} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} = \frac{\sqrt{1+3} + 2}{1} = 4.$

B3. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

με $f(1) = \alpha^2 \cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2 + 0 = \alpha^2$

Άρα $\alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \sqrt{4} \Rightarrow \alpha = \pm 2.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $v = 25 + 17 + 6 + 2 = 50$

$f_1\% = \frac{25}{50} \cdot 100 = 50\%$, $f_2\% = \frac{17}{50} \cdot 100 = 34\%$, $f_3\% = \frac{6}{50} \cdot 100 = 12\%$

$f_4\% = \frac{2}{50} \cdot 100 = 4\%$.

Μισθός (Εκατοντάδες €) x_i	Αριθμός Υπαλλήλων v_i	Σχετ.συχν % $f_i\%$	$x_i v_i$
6	25	50	150
10	17	34	170
15	6	12	90
20	2	4	40
Σύνολα	$v=50$	100	450

Γ2. $\bar{x} = \frac{450}{50} = 9$ εκατοντάδες €.

Γ3. $50\% + 34\% = 84\%$.

Γ4. $s^2 = \frac{(9-6)^2 \cdot 25 + (9-10)^2 \cdot 17 + (9-15)^2 \cdot 6 + (9-20)^2 \cdot 2}{50} =$

$$= \frac{225+17+216+242}{50} = \frac{700}{50} = 14.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = [(x-2)^2]'(x+\alpha) + (x-2)^2(x+\alpha)' = 2(x-2)(x+\alpha) + (x-2)^2 =$
 $= (x-2)(2x+2\alpha+x-2) = (x-2)(3x+2\alpha-2), \quad x \in \mathbb{R}.$

Δ2. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 4$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, από θεώρημα Fermat θα έχουμε:
 $f'(4) = 0 \Leftrightarrow 2(12+2\alpha-2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5.$

Δ3. Για $\alpha = -5$ έχουμε $f(x) = (x-2)^2(x-5)$ και $f'(x) = (x-2)(3x+2), \quad x \in \mathbb{R}$
 Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-12) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 4.$
 Από τον πίνακα μονοτονίας της f έχουμε:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	
		0 τ.μ.	-4 τ.ε.	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(4, +\infty)$ και
 γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 4].$

Στη θέση $x_0 = 2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2) = 0$, ενώ στην θέση $x_0 = 4$
 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(4) = -4.$

Δ4. Έχουμε $g(x) = h(x) \Leftrightarrow g(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 4$

Άρα

$$E(\Omega) = \int_2^4 |g(x) - h(x)| dx = \int_2^4 |f'(x)| dx = -\int_2^4 f'(x) dx = -(f(4) - f(2)) = 4 \text{ τ.μ.}$$

Β τρόπος

$$E(\Omega) = \int_2^4 |g(x) - h(x)| dx = \int_2^4 |3x^2 - 12x - (6x - 24)| dx = -3 \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx = -3 \left[\frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} + 8x \right]_2^4 =$$

$$= \dots = 4 \text{ τ.μ.}$$

Είναι $g(x) - f(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 3(x-2)(x-4)$ και είναι
 εταιρόσημο του $\alpha = 3 > 0$, εντός των ριζών 2 και 4.

Επιμέλεια λύσεων: Γιάννης Μοσχονάς
Μαθηματικός