

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ**  
**ΤΡΙΤΗ 19 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ**  
**ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι «αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό».

**(Μονάδες 10)**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f:A\rightarrow\mathbb{R}$  λέγεται ένα προς ένα;

**(Μονάδες 5)**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

**α) Αν**  $\lim_{x\rightarrow x_0}|f(x)|=+\infty$ , τότε  $\lim_{x\rightarrow x_0}f(x)=+\infty$  ή  $-\infty$

**β) Αν** η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και η  $f\circ g$  είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η συνάρτηση  $g$

**ΤΕΛΟΣ 1<sup>ΗΣ</sup> ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ**

θα είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Τα άκρα ενός διαστήματος  $\Delta$  αποτελούν κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης  $f$  που είναι ορισμένη στο διάστημα  $\Delta$ .

δ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε θα ισχύει  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $\chi$  του  $\Delta$ .

ε) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, τότε θα ισχύει:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f'(x) dx = 0, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 5x2=10)

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \\ e^{-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}}, & x \leq 1 \end{cases}$

**B1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 10)

**B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

(Μονάδες 6)

**B3.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η  $f^{-1}$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Να βρείτε στη συνέχεια, το σημείο τομής των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ .

(Μονάδες 9)

ΤΕΛΟΣ 2<sup>ΗΣ</sup> ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f$  και  $g'$  για τις οποίες ισχύει:  $f(x)-g'(x)=3x^2-6x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει δυο διαδοχικές ρίζες  $x_1, x_2$  με  $x_1 < -1$  και  $0 < x_2 < 2$ . Επίσης, η συνάρτηση  $g$  στρέφει τα κοίλα άνω.

**Γ1.** Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $g''(x)+6x=6$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(x_1, x_2)$ .

**(Μονάδες 4)**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο  $\mathbb{R}$ , το  $g(x_0)$ , όπου το  $x_0 \in (x_1, x_2)$ .

**(Μονάδες 7)**

**Γ3.** Αποδείξτε ότι υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε να

$$\text{ισχύει: } \frac{6 - g''(\xi)}{6} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

**(Μονάδες 7)**

**Γ4.** Αν η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M$  με τετμημένη το  $x_0$  του ερωτήματος (Γ2), διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$  και ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  όταν το  $x$  είναι ίσο με  $x_0$  είναι  $-2$ , να βρείτε το σημείο  $M$ .

**(Μονάδες 7)**

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f:(e,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f^2(x) + e^{f(x)+1} = xe^{f(x)} - 2 \quad \text{για κάθε } x \in (e, +\infty)$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**(Μονάδες 6)**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

**(Μονάδες 3)**

**Δ3.** Αν η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  είναι η

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 2}{e^x} + e, \quad x \in \mathbb{R}$$

**α)** Να μελετήσετε την  $f^{-1}$  ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι δεν έχει σημεία καμπής.

**(Μονάδες 4)**

**β)** Να αποδείξετε ότι η  $C_{f^{-1}}$  έχει μόνο μία ασύμπτωτη, την οποία και να βρείτε.

**(Μονάδες 5)**

**γ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_{f^{-1}}$  τον άξονα  $y'y$ , την ευθεία με εξίσωση  $x = 1$  και την ασύμπτωτη της  $C_{f^{-1}}$  του ερωτήματος (β).

**(Μονάδες 7)**

ΤΕΛΟΣ 4<sup>ΗΣ</sup> ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

## **ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά(ημερομηνία εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιο σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Η διάρκεια εξέτασης είναι (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

Επιστημονική επιμέλεια θεμάτων: Γιάννης Μοσχονάς  
(Καθηγητής στο 4<sup>ο</sup> Γενικό Λύκειο Ηρακλείου Κρήτης)